Plaquette 3 – Orthogonalité, bases orthonormées et procédé de Gram-Schmidt

Espaces préhilbertiens — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Orthogonalité.

— Famille orthogonale de vecteurs non nuls ⇒ libre.

— Base orthonormée (e_i) :

$$x = \sum_i \langle x, e_i\rangle e_i, \qquad \|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i\rangle^2, \qquad \langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i$$

— **Gram-Schmidt** : $v_1 = u_1$, $v_k = u_k - \sum_{i<k} \frac{\langle u_k, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i$, puis $e_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$; on a $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.

— **Orthogonal** : $F^\perp = \{x \mid \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\}$; si $F = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$, $x \in F^\perp \Leftrightarrow \langle x, f_i\rangle = 0$ pour tout i.

— $F \cap F^\perp = \{0\}$; en dimension finie, $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

— **Bessel** : si $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée, $\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2 \le \|x\|^2$.

— **Matrice orthogonale** : $Q^{\mathsf T} Q = I_n \Leftrightarrow$ les colonnes de Q forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Correction de l'exercice 1 – Gram-Schmidt dans R3

a) $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$.

— $v_2 = u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1$ avec $\langle u_2, e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $v_2 = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$, $\|v_2\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$.

— $v_3 = u_3 - \langle u_3, e_1\rangle e_1 - \langle u_3, e_2\rangle e_2$ avec $\langle u_3, e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\langle u_3, e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 - 1 + 2) = \frac{1}{\sqrt{6}}$:

$$v_3 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{6}(1,-1,2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

— $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$.

b) $\langle e_1, e_2\rangle \propto 1 - 1 + 0 = 0$, $\langle e_1, e_3\rangle \propto -1 + 1 + 0 = 0$, $\langle e_2, e_3\rangle \propto -1 - 1 + 2 = 0$, et chaque vecteur est normé.

c) $\langle w, e_1\rangle = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $\langle w, e_2\rangle = \frac{2 - 3 + 2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\langle w, e_3\rangle = \frac{-2 + 3 + 1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

— Parseval : $\frac{25}{2} + \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{75 + 1 + 8}{6} = 14 = 4 + 9 + 1$.

Réponse. $e_1 = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$, $e_2 = \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}}$, $e_3 = \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}}$; coordonnées de w : $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Correction de l'exercice 2 – Base orthonormée d'un plan de R4

a) $e_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$. $\langle u_2, e_1\rangle = \frac{10}{2} = 5$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$v_2 = u_2 - 5e_1 = (1,2,3,4) - \frac{5}{2}(1,1,1,1) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

— $\|v_2\|^2 = \frac{9+1+1+9}{4} = 5$, $e_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-3,-1,1,3)$.

b) $p_F(x) = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2$ avec $\langle x, e_1\rangle = \frac{1}{2}$ et $\langle x, e_2\rangle = -\frac{3}{2\sqrt{5}}$:

— $p_F(x) = \frac{1}{4}(1,1,1,1) - \frac{3}{20}(-3,-1,1,3) = \left(\frac{5+9}{20}, \frac{5+3}{20}, \frac{5-3}{20}, \frac{5-9}{20}\right) = \left(\frac{7}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{5}\right)$.

c) $\|p_F(x)\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{20} = \frac{7}{10}$ et, par Pythagore, $d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$: $d(x,F) = \sqrt{0{,}3} \approx 0{,}548$.

Réponse. $e_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $e_2 = \frac{(-3,-1,1,3)}{2\sqrt{5}}$; $p_F(x) = \left(\frac{7}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{5}\right)$; $d = \sqrt{0{,}3}$.

Correction de l’exercice 3 – Polynômes de Legendre en degré 2

a) $\int_{-1}^{1} t^m \,\mathrm{d}t = 0$ si m est impair, $\frac{2}{m+1}$ si m est pair. Donc $\langle X^p, X^q\rangle = \frac{2}{p+q+1}$ si $p+q$ est pair, 0 sinon ; en particulier $\langle 1, X\rangle = \langle X, X^2\rangle = 0$ (parité).

b) $v_1 = 1$; $v_2 = X$ (déjà orthogonal à 1) ; $v_3 = X^2 - \frac{\langle X^2, 1\rangle}{\|1\|^2}1 - \frac{\langle X^2, X\rangle}{\|X\|^2}X = X^2 - \frac{2/3}{2} = X^2 - \frac{1}{3}$.

c) Normes : $\|1\|^2 = 2$, $\|X\|^2 = \frac{2}{3}$, et

$$X^2 - \frac{1}{3}^2 = \int_{-1}^{1}\left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

— Base orthonormée : $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$.

d) $X^2 + X = \left(X^2 - \frac{1}{3}\right) + X + \frac{1}{3}$: coordonnées $\frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{8}{45}}$ sur les trois vecteurs normés (on multiplie chaque coefficient par la norme du vecteur non normé correspondant).

Réponse. Base orthogonale $(1, X, X^2 - \frac{1}{3})$; normes au carré 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{45}$; $X^2 + X = (X^2 - \frac{1}{3}) + X + \frac{1}{3}$.

Correction de l’exercice 4 – Coordonnées dans une base orthonormée

a) Normes : $\frac{1+4+4}{9} = 1$ pour chacun. Produits : $\langle e_1, e_2\rangle = \frac{2+2-4}{9} = 0$, $\langle e_1, e_3\rangle = \frac{2-4+2}{9} = 0$, $\langle e_2, e_3\rangle = \frac{4-2-2}{9} = 0$. Famille orthonormée de 3 vecteurs : base.

b) Dans une base orthonormée, les coordonnées sont des produits scalaires :

$$\langle w, e_1\rangle = \frac{3+0+6}{3} = 3, \quad \langle w, e_2\rangle = \frac{6+0-6}{3} = 0, \quad \langle w, e_3\rangle = \frac{6+0+3}{3} = 3$$

— $w = 3e_1 + 3e_3$. Contrôle : $(1,2,2) + (2,-2,1) = (3,0,3)$.

c) $3^2 + 0^2 + 3^2 = 18 = 9 + 0 + 9 = \|w\|^2$.

d) $Q^{\mathsf{T}}Q$ a pour coefficients les $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$: $Q^{\mathsf{T}}Q = I_3$, donc $Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$ (Q est orthogonale).

Réponse. Base orthonormée ; $w = 3e_1 + 3e_3$; $18 = 18$; $Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$.

Correction de l’exercice 5 – Orthogonal d’un plan de R4

a) $x = (a,b,c,d) \in F^{\perp}$ si et seulement si x est orthogonal aux deux générateurs :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $F^\perp = \{(a,b,-a,-b)\} = \mathrm{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$.

b) Dimensions $2+2=4$. Un vecteur de F s'écrit $(\alpha,\beta,\alpha,\beta)$; s'il est dans $F^\perp$, $\alpha+\alpha=0$ et $\beta+\beta=0$, donc il est nul.

c) On cherche $x=(\alpha,\beta,\alpha,\beta)+(\gamma,\delta,-\gamma,-\delta)$: $\alpha+\gamma=1$, $\alpha-\gamma=3$, donc $\alpha=2$, $\gamma=-1$; $\beta+\delta=2$, $\beta-\delta=4$, donc $\beta=3$, $\delta=-1$.

— $x=(2,3,2,3)+(-1,-1,1,1)$. Contrôle : $\langle(2,3,2,3),(-1,-1,1,1)\rangle=-2-3+2+3=0$.

Réponse. $F^\perp=\mathrm{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$; $x=(2,3,2,3)+(-1,-1,1,1)$.

Correction de l'exercice 6 – Propriétés de l'orthogonal

a) $F^\perp=\bigcap_{y\in F}\ker\langle\cdot,y\rangle$: intersection de noyaux de formes linéaires, c'est un sous-espace. Si $x\in F\cap F^\perp$, $\langle x,x\rangle=0$, donc $x=0$.

b) Si x est orthogonal à tout G, il l'est à tout $F\subset G$. Pour la somme : $F,G\subset F+G$ donne $(F+G)^\perp\subset F^\perp\cap G^\perp$; réciproquement, si $x\perp F$ et $x\perp G$, alors $\langle x,f+g\rangle=0+0$.

c) Si $x\in F$ et $y\in F^\perp$, $\langle x,y\rangle=0$: $x\in(F^\perp)^\perp$. En dimension n :

$$\dim(F^\perp)^\perp=n-\dim F^\perp=n-(n-\dim F)=\dim F$$

— l'inclusion devient une égalité.

d) $F\cap G\subset F$ donne $F^\perp\subset(F\cap G)^\perp$, de même pour G ; la somme de deux sous-espaces inclus dans un troisième y est incluse. En dimension finie, en appliquant b) à $F^\perp$ et $G^\perp$: $(F^\perp+G^\perp)^\perp=F^{\perp\perp}\cap G^{\perp\perp}=F\cap G$, puis on passe à l'orthogonal avec c).

Réponse. $F\cap F^\perp=\{0\}$; $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$; $(F^\perp)^\perp=F$ et $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$ en dimension finie.

Correction de l'exercice 7 – L'orthogonal des matrices symétriques

a) Pour S symétrique et A antisymétrique, $\mathrm{tr}(S^{\mathsf T}A)=\mathrm{tr}(SA)=-\mathrm{tr}(SA)$ (on transpose et l'on utilise $\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$), donc $\langle S,A\rangle=0$.

b) $\dim S_n^\perp=n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}=\dim A_n$, et $A_n\subset S_n^\perp$: égalité.

c) La décomposition $M=\frac{M+M^{\mathsf T}}{2}+\frac{M-M^{\mathsf T}}{2}$ est la décomposition selon $S_n\oplus S_n^\perp$: le projeté est la partie symétrique, et

$$d(M,S_n)=\frac{M-M^{\mathsf T}}{2}$$

— Ici $\frac{M-M^{\mathsf T}}{2}=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$, de norme $\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$. La matrice symétrique la plus proche est $\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$.

Réponse. $S_n^\perp=A_n$; projeté $=\frac{M+M^{\mathsf T}}{2}$; $d(M,S_2)=2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Fonctions de moyenne nulle

a) $f\perp C\Leftrightarrow\langle f,1\rangle=\int_0^1 f=0$ (il suffit de tester la fonction constante 1, qui engendre C).

b) On écrit $f=m+(f-m)$ avec $m=\int_0^1 f$ (la **moyenne** de f) :

$$\int_0^1(f-m)=m-m=0$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— donc $f - m \in C^\perp$ et $m \in C$. L'intersection est nulle (une constante d'intégrale nulle est nulle). Le projeté orthogonal de f sur C est sa moyenne.

c) $m = \int_0^1 t^2 = \frac{1}{3}$. $d(f,C)^2 = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 t^4 - \frac{2}{3}\int_0^1 t^2 + \frac{1}{9} = \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$.

— $d(f,C) = \frac{2}{3\sqrt{5}} \approx 0{,}298$: c'est l'**écart type** de t^2 quand t est uniforme sur $[0,1]$; la meilleure constante approchant f est sa moyenne.

Réponse. $C^\perp$ = fonctions d'intégrale nulle ; $f = m + (f - m)$; $d(t^2, C) = \frac{2}{3\sqrt{5}}$.

Correction de l'exercice 9 – La famille trigonométrique

a) Pour $j \neq k$ (entiers ≥ 0), par les formules de produit :

$$\int_0^{2\pi} \cos(jt)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos((j-k)t) + \cos((j+k)t))\mathrm{d}t = 0$$

— (l'intégrale de $\cos(mt)$ sur une période est nulle pour $m \neq 0$). De même $\int \sin(jt)\sin(kt) = 0$ pour $j \neq k$, et $\int_0^{2\pi} \sin(jt)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (\sin((j+k)t) + \sin((j-k)t)) = 0$ pour tous j, k.

b) $\|c_0\|^2 = 2\pi$; $\|c_k\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2kt)}{2} = \pi$, de même $\|s_k\|^2 = \pi$. Famille orthonormée : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}$.

c) Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre : E contient des familles libres de cardinal $2n+1$ pour tout n.

Réponse. Famille orthogonale ; normes $\sqrt{2\pi}$, $\sqrt{\pi}$; E de dimension infinie.

Correction de l'exercice 10 – L'inégalité de Bessel et la somme des 1/k²

a) Soit $p = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k$, projeté de f sur $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Alors $f - p$ est orthogonal à chaque e_k, donc à p, et par Pythagore

$$\|f\|^2 = \|p\|^2 + \|f-p\|^2 \geq \|p\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle^2$$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kt)}{k}\,\mathrm{d}t = -\frac{2\pi\cos(k\pi)}{k} + 0 = \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k}$.

— Donc $\langle f, e_k\rangle = \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k\sqrt{\pi}} = \frac{2\sqrt{\pi}(-1)^{k+1}}{k}$.

c) $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi^3}{3}$. Bessel : $\sum_{k=1}^{n} \frac{4\pi}{k^2} \leq \frac{2\pi^3}{3}$, soit

— $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$. (On démontre en MP que la limite de la somme est exactement $\frac{\pi^2}{6}$: c'est l'égalité de Parseval.)

Réponse. Bessel par Pythagore ; $\langle t, e_k\rangle = \frac{2\sqrt{\pi}(-1)^{k+1}}{k}$; $\sum_{k \leq n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 11 – Décomposition QR

a) $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. $v_2 = a_2 - \langle a_2, q_1\rangle q_1 = (1,0) - \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

b) $a_1 = \sqrt{2}\,q_1$ et $a_2 = \langle a_2, q_1\rangle q_1 + \langle a_2, q_2\rangle q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} q_2$. Donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

c) $QR = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

d) $QRX = B \Leftrightarrow RX = Q^{\mathsf{T}}B$ (car $Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$). $Q^{\mathsf{T}}B = \frac{1}{\sqrt{2}}(4,2)$. Remontée : $\frac{1}{\sqrt{2}}y = \frac{2}{\sqrt{2}}$, $y = 2$; $\sqrt{2}x + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $x = 1$. Contrôle : $x + y = 3$, $x = 1$.

Réponse. $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$; $X = (1,2)$.

Correction de l’exercice 12 – Compléter un vecteur unitaire en base orthonormée

a) $e_1^{\perp}$: $x + 2y + 2z = 0$ (plan de dimension 2).

b) $w = (2,-1,0)$ vérifie $2 - 2 + 0 = 0$: $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)$. Il reste un vecteur de $e_1^{\perp}$ orthogonal à e_2 ; le produit vectoriel le fournit directement :

$$e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2\times 0 - 2\times(-1),\ 2\times 2 - 1\times 0,\ 1\times(-1) - 2\times 2) = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,-5)$$

— Norme : $\frac{\sqrt{4+16+25}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{45}}{3\sqrt{5}} = 1$. On pose $e_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,-5)$.

c) $e_3 \perp e_1$ ($2 + 8 - 10 = 0$) et $e_3 \perp e_2$ ($4 - 4 + 0 = 0$) : base orthonormée. Elle est directe car $e_3 = e_1 \wedge e_2$ (donc $\det(e_1, e_2, e_3) = \|e_1 \wedge e_2\|^2 = 1 > 0$).

Réponse. $e_1^{\perp}$: $x + 2y + 2z = 0$; $e_2 = \frac{(2,-1,0)}{\sqrt{5}}$, $e_3 = \frac{(2,4,-5)}{3\sqrt{5}}$; base orthonormée directe.

Correction de l’exercice 13 – Une matrice orthogonale symétrique

a) Les colonnes sont les vecteurs de l’exercice « coordonnées dans une base orthonormée » : $Q^{\mathsf{T}}Q = I_3$. Q est symétrique ($Q^{\mathsf{T}} = Q$), donc $Q^2 = Q^{\mathsf{T}}Q = I_3$: c’est une **symétrie**.

b) $\det Q = \frac{1}{27}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{27}(1(1-4) - 2(2+4) + 2(-4-2)) = \frac{-3-12-12}{27} = -1$.

c) $Q - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$: toutes les lignes sont proportionnelles à $(-1,1,1)$, le noyau est le plan $-x + y + z = 0$.

— $Q + I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$: noyau de dimension $3 - 2 = 1$; le vecteur $(-1,1,1)$ convient ($-4 + 2 + 2 = 0$, $-2 + 4 - 2 = 0$, $-2 - 2 + 4 = 0$).

— Les deux sous-espaces sont orthogonaux : Q est la **réflexion** (symétrie orthogonale) par rapport au plan $-x + y + z = 0$, ce qui est cohérent avec $\det Q = -1$.

Réponse. Q orthogonale symétrique, $Q^2 = I_3$, $\det Q = -1$; réflexion par rapport au plan

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$-x+y+z=0$.

Correction de l'exercice 14 – Gram-Schmidt sur R2[X] pour l'intégrale sur [0, 1]

a) $v_3 = X^2 - \langle X^2, e_1\rangle e_1 - \langle X^2, e_2\rangle e_2$ avec $\langle X^2, e_1\rangle = \frac{1}{3}$ et $\langle X^2, e_2\rangle = \sqrt{3}\int_0^1 (2t^3 - t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$:

$$v_3 = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}(2X-1) = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

— Pour la norme, on pose $s = t - \frac{1}{2}$: $v_3 = s^2 - \frac{1}{12}$, et

$$\|v_3\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2}\left(s^2 - \frac{1}{12}\right)^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{80} - \frac{1}{72} + \frac{1}{144} = \frac{1}{180}$$

— $e_3 = \sqrt{180}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

b) $\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$ et $\int_0^1 t\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = 0$.

c) Le projeté de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est $X^2 - v_3 = X - \frac{1}{6}$: c'est la meilleure approximation affine de t^2 en moyenne quadratique sur $[0,1]$, avec une erreur $\|v_3\| = \frac{1}{\sqrt{180}} \approx 0{,}075$.

Réponse. $e_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$; meilleure approximation de X^2 : $X - \frac{1}{6}$, erreur $\frac{1}{\sqrt{180}}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : racines d'un polynôme orthogonal et quadrature de Gauss

a) $X^2 = \frac{1}{3}$ donne $X = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}577$, dans $]-1,1[$.

b) Exactitude pour 1 : $\alpha + \beta = 2$. Pour X : $-\frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\beta}{\sqrt{3}} = 0$. Donc $\alpha = \beta = 1$.

c) $P = L_2 Q + R$ avec $\deg Q \le 1$ et $\deg R \le 1$. Alors

$$\int_{-1}^1 P = \langle L_2, Q\rangle + \int_{-1}^1 R = 0 + \int_{-1}^1 R$$

— car $L_2 \perp \mathbb{R}_1[X]$. Et $P\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = R\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ puisque L_2 s'annule en ces points. Par b) appliqué à R : $\int_{-1}^1 P = R\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + R\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Deux points suffisent pour le degré 3 : c'est la **quadrature de Gauss**.

d) $\mathrm{e}^{-0{,}5774} + \mathrm{e}^{0{,}5774} \approx 0{,}5614 + 1{,}7813 = 2{,}3427$; valeur exacte $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} \approx 2{,}3504$. Erreur $\approx 0{,}008$, meilleure que Simpson (0,012) avec un point de moins.

Réponse. Racines $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\int_{-1}^1 P = P(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + P(\frac{1}{\sqrt{3}})$ exact en degré ≤ 3 ; $\approx 2{,}3427$ contre 2,3504.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).