Plaquette 1 – Produit scalaire, orthogonalité, Gram-Schmidt et projection orthogonale

Espaces préhilbertiens — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Produit scalaire. Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un produit scalaire si elle est **bilinéaire**, **symétrique**, **positive** et **définie** ($\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$).

— **Exemples** : $\sum x_i y_i$ sur $\mathbb{R}^n$; $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sur $C([a\,;b],\mathbb{R})$; $\mathrm{tr}\left(A^{\mathsf{T}}B\right)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

— **Norme associée** : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Inégalités.

— **Cauchy-Schwarz** :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

avec égalité **si et seulement si** x et y sont colinéaires.

— **Inégalité triangulaire** : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

— **Identité du parallélogramme** : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

— **Identité de polarisation** : $\langle x, y \rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$.

Orthogonalité.

— $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle = 0$. **Pythagore** : $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

— Une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est **libre**.

— **Base orthonormée** (e_i) : alors $x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$ et $\|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2$.

— **Procédé de Gram-Schmidt** : à partir d'une base (u_i), on construit une base orthogonale par

$$v_1 = u_1, \qquad v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

Projection orthogonale sur un sous-espace F de base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle\, e_i$$

— $p_F(x)$ est l'**unique** vecteur de F minimisant $\|x - y\|$ pour $y \in F$: c'est la **meilleure approximation** de x dans F.

— $E = F \oplus F^{\perp}$ et $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître un produit scalaire

Pour φ : bilinéarité et symétrie sont évidentes.

— **Positivité** : $\varphi(u,u) = x^2 + 2y^2 \geq 0$.

— **Caractère défini** : $x^2 + 2y^2 = 0$ impose $x = y = 0$ (somme de carrés à coefficients strictement positifs).

— φ est donc un **produit scalaire**.

Pour ψ : $\psi(u,u) = x^2 - y^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Avec $u = (0, 1)$: $\psi(u, u) = -1 < 0$ — la forme n'est **pas positive**.
— ψ n'est **pas** un produit scalaire (c'est une forme de **signature** $(1, 1)$, du type utilisé en relativité).
— **Réflexe** : tester la positivité sur les vecteurs de la base canonique est souvent suffisant pour éliminer un candidat.

Réponse. φ oui ; ψ non (pas positive).

Correction de l'exercice 2 – Cauchy-Schwarz

On applique **Cauchy-Schwarz** dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

— Posons $u = (a, b, c)$ et $v = (1, 1, 1)$.
— $\langle u, v\rangle = a + b + c$, $\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $\|v\| = \sqrt{3}$.
— Cauchy-Schwarz donne $|a + b + c| \leq \sqrt{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
— En élevant au carré : $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.
— **Cas d'égalité** : u et v colinéaires, c'est-à-dire $a = b = c$.
— **Contrôle** avec $(1, 2, 3)$: $36 \leq 3 \times 14 = 42$ ✓ ; avec $(2, 2, 2)$: $36 = 3 \times 12 = 36$ — égalité ✓

Réponse. Cauchy-Schwarz avec $u = (a, b, c)$ et $v = (1, 1, 1)$.

Correction de l'exercice 3 – Produit scalaire intégral

— $\langle f, g\rangle = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.
— $\|f\|^2 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$, donc $\|f\| = 1$.
— $\|g\|^2 = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$, donc $\|g\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$.
— **Vérification de Cauchy-Schwarz** : $\frac{1}{2} = 0{,}5$ et $\|f\|\|g\| = 0{,}577$. On a bien $0{,}5 \leq 0{,}577$ ✓
— L'inégalité est **stricte**, ce qui est cohérent : les fonctions 1 et t ne sont pas proportionnelles.

Réponse. $\frac{1}{2}$; $\|f\| = 1$; $\|g\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 4 – Famille orthogonale

Orthogonalité : on calcule les trois produits scalaires.

— $\langle u_1, u_2\rangle = 1 - 1 + 0 = 0$ ✓
— $\langle u_1, u_3\rangle = 1 + 1 - 2 = 0$ ✓
— $\langle u_2, u_3\rangle = 1 - 1 + 0 = 0$ ✓
— Une famille **orthogonale de vecteurs non nuls** est libre ; avec $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est une **base orthogonale**.

Normalisation : on divise chaque vecteur par sa norme.

— $\|u_1\| = \sqrt{3}$, $\|u_2\| = \sqrt{2}$, $\|u_3\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$.
— **Base orthonormée** :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)\right)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** : la somme des carrés des normes des projections d'un vecteur doit redonner sa norme au carré (Parseval).

Réponse. Base orthogonale ; on divise par $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$.

Correction de l'exercice 5 – Procédé de Gram-Schmidt

Premier vecteur : $v_1 = u_1 = (1,1)$, de norme $\sqrt{2}$, donc $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

Deuxième vecteur : on retire à u_2 sa composante sur v_1.

— $\langle u_2, v_1\rangle = 1 + 0 = 1$ et $\|v_1\|^2 = 2$.

$$v_2 = u_2 - \frac{1}{2}v_1 = (1,0) - \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

— **Vérification d'orthogonalité** : $\langle v_1, v_2\rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ✓

— $\|v_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

— **Base orthonormée** : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right)$.

— **Point clé du procédé** : à chaque étape, $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k) = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$ — l'orthonormalisation ne change pas les sous-espaces engendrés.

Réponse. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right)$.

Correction de l'exercice 6 – Projection orthogonale sur une droite

Formule de la projection sur une droite dirigée par a :

$$p_D(u) = \frac{\langle u, a\rangle}{\|a\|^2}\, a$$

— $\langle u, a\rangle = 1 + 2 + 3 = 6$ et $\|a\|^2 = 3$.

— Donc $p_D(u) = \frac{6}{3}(1,1,1) = (2,2,2)$.

— **Vecteur résiduel** : $u - p_D(u) = (-1,0,1)$.

— **Contrôle d'orthogonalité** : $\langle(-1,0,1),(1,1,1)\rangle = -1 + 0 + 1 = 0$ ✓

— **Distance** : $d(u,D) = \|(-1,0,1)\| = \sqrt{2} \approx 1{,}414$.

— **Contrôle par Pythagore** : $\|u\|^2 = 14$ et $\|p_D(u)\|^2 + d^2 = 12 + 2 = 14$ ✓

Réponse. Projeté $(2,2,2)$, distance $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Projection sur un plan

Méthode rapide : on projette sur la **normale**, puis on soustrait.

— Un vecteur normal à P est $n = (1,1,1)$, et $P = n^\perp$.

— $p_n(u) = \frac{\langle u, n\rangle}{\|n\|^2} n = \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

— **Projeté sur le plan** : $p_P(u) = u - p_n(u) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

— **Vérifications** : la somme des coordonnées vaut $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$, donc le vecteur est bien dans P ✓ ; et $u - p_P(u) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ est colinéaire à n ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Distance de u à P** : $\left|\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$, ce qui coïncide avec la formule $\frac{|1+0+0|}{\sqrt{1+1+1}}$ ✓

Réponse. $p_P(u) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, distance $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 8 – Pythagore et parallélogramme

a) **Pythagore** : $\|x+y\|^2 = 25$ et $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 9 + 16 = 25$.

— L'égalité est vérifiée, donc $x \perp y$.

— **Confirmation par polarisation** : $\langle x, y\rangle = \frac{25-9-16}{2} = 0$ ✓

b) **Identité du parallélogramme** : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

— Donc $25 + \|x-y\|^2 = 18 + 32 = 50$, soit $\|x-y\|^2 = 25$ et $\|x-y\| = 5$.

— **Cohérence** : quand $x \perp y$, les deux diagonales du parallélogramme (qui est alors un **rectangle**) ont la même longueur ✓

— On retrouve le triangle 3-4-5 de Pythagore.

Réponse. a) oui · b) $\|x-y\| = 5$.

Correction de l'exercice 9 – Meilleure approximation polynomiale

Minimiser $\|g - a\mathbf{1}\|^2$ revient à **projeter** $g(t) = t$ sur la droite des fonctions constantes.

— $\langle g, \mathbf{1}\rangle = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et $\|\mathbf{1}\|^2 = 1$.

— **Projection** : $a = \frac{\langle g, \mathbf{1}\rangle}{\|\mathbf{1}\|^2} = \frac{1}{2}$.

— **Vérification directe** : $\int_0^1 (t-a)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3} - a + a^2$, trinôme minimal en $a = \frac{1}{2}$ ✓

— **Valeur du minimum** : $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4-6+3}{12} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083$.

— **Interprétation statistique** : a est la **valeur moyenne** de g sur $[0\,;1]$, et l'erreur quadratique minimale est sa **variance** — la projection orthogonale est la version géométrique de la méthode des moindres carrés.

Réponse. $a = \frac{1}{2}$, erreur minimale $\frac{1}{12}$.

Correction de l'exercice 10 – Orthogonal d'un sous-espace

Un vecteur $u = (x, y, z, t)$ est dans $F^\perp$ s'il est orthogonal aux **générateurs**.

— $\langle u, (1,1,0,0)\rangle = x + y = 0$.

— $\langle u, (0,0,1,1)\rangle = z + t = 0$.

— Donc $y = -x$ et $t = -z$:

$$F^\perp = \{(x, -x, z, -z)\} = \mathrm{Vect}((1,-1,0,0),\,(0,0,1,-1))$$

— **Dimension** : $\dim F^\perp = 2 = 4 - \dim F$ ✓ (relation $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$).

— **Contrôle** : $F \cap F^\perp = \{0\}$, et $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4$.

— **Économie de calcul** : il suffit de tester l'orthogonalité aux **générateurs**, pas à tous les vecteurs de F.

Réponse. $F^\perp = \mathrm{Vect}((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Matrices et trace

Norme : $\operatorname{tr}\left(A^{\mathsf{T}}A\right)$ est la somme des carrés de **tous** les coefficients.

— $\|A\|^2 = 1+4+9+16 = 30$, donc $\|A\| = \sqrt{30} \approx 5{,}477$.

Orthogonalité des symétriques et antisymétriques. Soient S symétrique et N antisymétrique.

— $\langle S, N\rangle = \operatorname{tr}\left(S^{\mathsf{T}}N\right) = \operatorname{tr}(SN)$.

— Par ailleurs $\operatorname{tr}(SN) = \operatorname{tr}\left((SN)^{\mathsf{T}}\right) = \operatorname{tr}\left(N^{\mathsf{T}}S^{\mathsf{T}}\right) = \operatorname{tr}(-NS) = -\operatorname{tr}(NS) = -\operatorname{tr}(SN)$.

— Donc $2\operatorname{tr}(SN) = 0$: les deux sous-espaces sont **orthogonaux**.

— **Conséquence** : la décomposition $A = \dfrac{A+A^{\mathsf{T}}}{2} + \dfrac{A-A^{\mathsf{T}}}{2}$ est la **décomposition orthogonale** de A.

— **Contrôle avec notre** A : partie symétrique $\begin{pmatrix} 1 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 4 \end{pmatrix}$ de norme carrée $1 + 6{,}25 + 6{,}25 + 16 = 29{,}5$; partie antisymétrique $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ de norme carrée $0{,}5$. Somme : 30 ✓ (Pythagore).

Réponse. $\|A\| = \sqrt{30}$; symétriques $\perp$ antisymétriques.

Correction de l'exercice 12 – Une norme qui ne vient pas d'un produit scalaire

a) $N(x,y) \geq 0$, nul si et seulement si $x = y = 0$; $N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| N(x,y)$. C'est une norme.

b) Toute norme issue d'un produit scalaire vérifie l'**identité du parallélogramme**

$$N(u+v)^2 + N(u-v)^2 = 2N(u)^2 + 2N(v)^2$$

— Ici $u+v = (1,1)$ et $u-v = (1,-1)$: $N(u+v) = N(u-v) = 1$. Membre de gauche : $1+1 = 2$; membre de droite : $2+2 = 4$.

c) L'identité est fausse, donc N n'est associée à aucun produit scalaire.

d) Avec les mêmes vecteurs : $N_1(u+v) = N_1(u-v) = 2$, gauche $4+4 = 8$; droite $2+2 = 4$. Même conclusion. Seule la norme euclidienne $\sqrt{x^2+y^2}$ (parmi ces trois) vérifie l'identité : $2+2 = 2+2$.

Réponse. Parallélogramme : $2 \neq 4$ pour N, $8 \neq 4$ pour N_1 : aucune des deux n'est euclidienne.

Correction de l'exercice 13 – Distance d'un point à un plan de R3

a) $P = \{x \mid \langle x, n\rangle = 0\}$ avec $n = (1,2,-2)$. Donc $\operatorname{Vect}(n) \subset P^{\perp}$, et $\dim P^{\perp} = 3-2 = 1$: $P^{\perp} = \operatorname{Vect}(n)$.

b) On retire à a sa composante selon n :

$$p(a) = a - \frac{\langle a, n\rangle}{\|n\|^2}\, n$$

— $\langle a, n\rangle = 3+2-2 = 3$, $\|n\|^2 = 1+4+4 = 9$: $p(a) = (3,1,1) - \frac{1}{3}(1,2,-2) = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

— Contrôle : $\frac{8}{3} + \frac{2}{3} - \frac{10}{3} = 0$, $p(a) \in P$.

c) $d(a,P) = \|a - p(a)\| = \frac{1}{3}(1,2,-2) = \frac{1}{3} \times 3 = 1$. Et $\dfrac{|\langle a, n\rangle|}{\|n\|} = \dfrac{3}{3} = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $n = (1, 2, -2)$; $p(a) = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$; $d(a, P) = 1$.

Correction de l'exercice 14 – Base orthonormée de R1[X] pour l'intégrale sur [0, 1]

a) $\langle 1, 1\rangle = 1$, $\langle 1, X\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle X, X\rangle = \frac{1}{3}$. Comme $\langle 1, X\rangle \neq 0$, la base n'est pas orthogonale.

b) $e_1 = 1$ (déjà de norme 1). Puis on retire à X sa projection sur e_1 :

$$v_2 = X - \langle X, e_1\rangle e_1 = X - \frac{1}{2}$$

— $\|v_2\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{(t-\frac{1}{2})^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$. Donc $e_2 = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1)$.

c) Coordonnées : $\langle P, e_1\rangle = \int_0^1 (3t + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}$ et
$\langle P, e_2\rangle = \sqrt{3}\int_0^1 (3t + 1)(2t - 1)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int_0^1 (6t^2 - t - 1)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\left(2 - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

— Vérification : $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}(2X - 1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}(2X - 1) = 3X + 1$.

— $\|P\|^2 = \frac{25}{4} + \frac{3}{4} = 7$, et directement $\int_0^1 (3t + 1)^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(3t+1)^3}{9}\right]_0^1 = \frac{64 - 1}{9} = 7$.

Réponse. $e_1 = 1$, $e_2 = \sqrt{3}(2X - 1)$; $P = \frac{5}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$; $\|P\|^2 = 7$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : moindres carrés

On projette f sur $F = \mathbb{R}_1[X]$, en utilisant une base **orthogonale** de F.

Étape 1 — base orthogonale de F (Gram-Schmidt sur 1 et t).

— $v_1 = 1$, $\|v_1\|^2 = 1$.

— $\langle t, 1\rangle = \frac{1}{2}$, donc $v_2 = t - \frac{1}{2}$, avec $\|v_2\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{12}$.

Étape 2 — coefficients de la projection.

— $\langle f, v_1\rangle = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$.

— $\langle f, v_2\rangle = \int_0^1 t^2\left(t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Étape 3 — projeté.

$$p_F(f) = \frac{1/3}{1} \times 1 + \frac{1/12}{1/12}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + t - \frac{1}{2} = t - \frac{1}{6}$$

— **Vérification de l'orthogonalité du résidu** $r = t^2 - t + \frac{1}{6}$:

— $\langle r, 1\rangle = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$ ✓

— $\langle r, t\rangle = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3 - 4 + 1}{12} = 0$ ✓

— **Erreur quadratique** : $\|r\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{180} \approx 0{,}0056$.

— **Portée** : c'est exactement le principe de la **régression linéaire**, transposé aux fonctions. Le polynôme obtenu, $t - \frac{1}{6}$, est la meilleure droite au sens de l'erreur quadratique moyenne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $p_F(f)(t) = t - \dfrac{1}{6}$, erreur $\dfrac{1}{180}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).