Plaquette 2 – Produits scalaires et inégalités de Cauchy-Schwarz

Espaces préhilbertiens — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Produits scalaires et inégalités.

— Produit scalaire : forme bilinéaire, symétrique, **définie positive**.

— Exemples de référence : $\sum x_i y_i$; $\int_a^b fg$ sur $C([a,b])$; $\int_a^b fg\,w$ avec un poids w continu, positif, non identiquement nul ; $\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}B) = \sum a_{ij}b_{ij}$; $\sum_k P(a_k)Q(a_k)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ si l'on prend au moins $n+1$ points distincts.

— **Cauchy-Schwarz** :

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|, \quad \text{égalité} \Leftrightarrow x, y \text{ colinéaires}$$

— Formes usuelles : $\left(\sum a_k b_k\right)^2 \leq \sum a_k^2 \sum b_k^2$ et $\left(\int fg\right)^2 \leq \int f^2 \int g^2$.

— **Polarisation** : $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

— **Triangulaire** : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, égalité $\Leftrightarrow$ x et y **positivement** colinéaires.

— Forme $X^{\mathsf{T}}SY$ sur $\mathbb{R}^2$ avec $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$: produit scalaire $\Leftrightarrow$ $a>0$ et $ac-b^2>0$.

Correction de l'exercice 1 – Deux formes bilinéaires sur R2

a) Chaque terme est un produit d'une coordonnée de x par une coordonnée de y : linéaire en x et en y. Échanger x et y échange x_1y_2 et x_2y_1, qui ont le même coefficient : symétrie.

b) On complète le carré :

$$\varphi(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1+x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$$

— Nul si et seulement si $x_2 = 0$ et $x_1 + x_2 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$: défini positif.

c) $\psi(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$; pour $x = (1,-1)$: $1 - 4 + 1 = -2 < 0$. Pas positif, donc pas un produit scalaire.

d) $\varphi(e_1,e_1) = 1$, $\varphi(e_2,e_2) = 2$, $\varphi(e_1,e_2) = 1$. Donc $\|e_1\| = 1$, $\|e_2\| = \sqrt{2}$ et $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$: angle $\frac{\pi}{4}$. La base canonique n'est pas orthonormée pour φ.

Réponse. $\varphi(x,x) = (x_1+x_2)^2 + x_2^2$: produit scalaire ; $\psi(1,-1) = -2$: non ; angle $(e_1,e_2) = \frac{\pi}{4}$ pour φ.

Correction de l'exercice 2 – Produit scalaire par évaluations

a) Bilinéarité et symétrie : chaque terme $P(k)Q(k)$ l'est. Positivité : $\langle P,P\rangle = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$.

b) Si $\langle P,P\rangle = 0$, alors $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Pour $n = 2$, un polynôme de degré ≤ 2 ayant 3 racines est nul : la forme est **définie**.

c) Pour $n = 3$, $P = X(X-1)(X-2) \neq 0$ vérifie $\langle P,P\rangle = 0$: la forme n'est pas définie.

d) $L_i(k) = \delta_{ik}$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\langle L_i, L_j\rangle = \sum_{k=0}^{2} L_i(k)L_j(k) = \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}$$

— famille orthonormée de 3 vecteurs en dimension 3 : base orthonormée. Les coordonnées d'un polynôme dans cette base sont ses valeurs $P(0), P(1), P(2)$.

Réponse. Produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$; pas sur $\mathbb{R}_3[X]$ ($X(X-1)(X-2)$) ; (L_0, L_1, L_2) orthonormée.

Correction de l'exercice 3 – Un produit scalaire faisant intervenir la dérivée

a) Bilinéarité (linéarité de la dérivation et de l'intégrale), symétrie, positivité : $\langle f, f\rangle = f(0)^2 + \int_0^1 f'^2 \geq 0$.

— Défini : si $\langle f, f\rangle = 0$, alors $f(0) = 0$ et $\int_0^1 f'^2 = 0$; f'^2 est **continue** et positive d'intégrale nulle, donc $f' = 0$ sur $[0,1]$. Ainsi f est constante égale à $f(0) = 0$.

b) $[1,1] = 0$ avec $1 \neq 0$: pas défini sur E. Sur F, le même raisonnement donne $f' = 0$ et $f(0) = 0$, donc $f = 0$: c'est un produit scalaire.

c) $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1 \cdot f'(t)\,\mathrm{d}t$. Par Cauchy-Schwarz sur $[0,x]$:

$$|f(x)| \leq \sqrt{\int_0^x 1^2}\sqrt{\int_0^x f'^2} \leq \sqrt{x}\sqrt{\int_0^1 f'^2} = \sqrt{x}\sqrt{[f,f]}$$

Réponse. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ produit scalaire (car $f(0) = 0$ et $f' = 0$) ; $[\cdot,\cdot]$ seulement sur F ; $|f(x)| \leq \sqrt{x}\sqrt{[f,f]}$.

Correction de l'exercice 4 – Produit scalaire à poids

a) Bilinéaire, symétrique, positive ($f^2 t \geq 0$ sur $[0,1]$). Défini : si $\int_0^1 f(t)^2 t\,\mathrm{d}t = 0$, la fonction continue positive $f^2 t$ est nulle sur $[0,1]$, donc $f(t) = 0$ pour $t \in]0,1]$, puis $f(0) = 0$ par **continuité**. Le poids ne s'annule qu'en un point : cela ne suffit pas à perdre le caractère défini.

b) $\|1\|^2 = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, $\|t\|^2 = \int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$, $\langle 1, t\rangle = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$.

$$\cos\theta = \frac{\langle 1, t\rangle}{\|1\|\|t\|} = \frac{1/3}{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}943$$

— $\theta \approx 0{,}340$ rad (environ $19{,}5^\circ$).

c) $\langle t - a, 1\rangle = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$. (C'est la « moyenne pondérée » de t pour ce poids.)

Réponse. Produit scalaire ; $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $a = \frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 5 – Cauchy-Schwarz pour les sommes

a) Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ avec $u = (a_1, \ldots, a_n)$ et $v = (1, \ldots, 1)$:

$$\left(\sum a_k \cdot 1\right)^2 \leq \sum a_k^2 \times \sum 1^2 = n\sum a_k^2$$

— Égalité si et seulement si u et v sont colinéaires, c'est-à-dire si tous les a_k sont égaux.

b) En divisant par n^2 et en prenant la racine : $\frac{1}{n}\sum a_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum a_k^2}$.

c) Avec $a_k = \sqrt{k}$: $\left(\sum\sqrt{k}\right)^2 \leq n\sum k = n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$, d'où $\sum\sqrt{k} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Avec $u = (\sqrt{a_k})$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$: $\left(\sum \sqrt{a_k}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2 = n^2 \le \sum a_k \sum \frac{1}{a_k}$.

Réponse. $\left(\sum a_k\right)^2 \le n\sum a_k^2$; $\sum\sqrt{k} \le n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$; $\sum a_k \sum \frac{1}{a_k} \ge n^2$.

Correction de l'exercice 6 – Cauchy-Schwarz pour les intégrales

a) Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\int_a^b fg$, avec $g = 1$:

$$\left(\int_a^b f\cdot 1\right)^2 \le \int_a^b f^2 \times \int_a^b 1 = (b-a)\int_a^b f^2$$

b) Avec $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ (continues car $f>0$) : $\left(\int_a^b \sqrt{f}\cdot\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2 = (b-a)^2 \le \int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f}$. Égalité si et seulement si $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires, c'est-à-dire f constante.

c) $\int_0^1 \mathrm{e}^t = \mathrm{e}-1 \approx 1{,}718$ et $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} = 1-\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$; produit $\approx 1{,}086 \ge 1$.

d) $\left(\int_0^1 \sqrt{1+t^3}\right)^2 \le \int_0^1 (1+t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{4}$, donc $\int_0^1 \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t \le \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}118$. (La valeur exacte est proche de 1,111 : la majoration est fine.)

Réponse. $\left(\int f\right)^2 \le (b-a)\int f^2$; $\int f \int \frac{1}{f} \ge (b-a)^2$, égalité ssi f constante ; d) $\le \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Trace et produit scalaire de Frobenius

a) $(A^{\mathsf{T}}B)_{jj} = \sum_i a_{ij}b_{ij}$, donc $\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}B) = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$: c'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$, en rangeant les coefficients en un vecteur.

b) $\mathrm{tr}A = \langle I_n, A\rangle$ et $\|I_n\|^2 = n$. Par Cauchy-Schwarz :

$$(\mathrm{tr}A)^2 = \langle I_n, A\rangle^2 \le \|I_n\|^2\|A\|^2 = n\,\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}A)$$

c) Si S est symétrique et T antisymétrique : $\langle S,T\rangle = \mathrm{tr}(S^{\mathsf{T}}T) = \mathrm{tr}(ST)$, et aussi $= \mathrm{tr}((ST)^{\mathsf{T}}) = \mathrm{tr}(T^{\mathsf{T}}S^{\mathsf{T}}) = -\mathrm{tr}(TS) = -\mathrm{tr}(ST)$. Donc $\langle S,T\rangle = 0$.

d) $\|A\|^2 = 1+4+9+16 = 30$, $\|A\| = \sqrt{30}$. $(\mathrm{tr}A)^2 = 25 \le 2\times 30 = 60$.

Réponse. $\langle A,B\rangle = \sum a_{ij}b_{ij}$; $(\mathrm{tr}A)^2 \le n\|A\|^2$; $S_n \perp A_n$; d) $\sqrt{30}$, $25 \le 60$.

Correction de l'exercice 8 – Polarisation : retrouver le produit scalaire

a) En développant $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$:

$$\langle x,y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{16-4-9}{2} = \frac{3}{2}$$

b) $\|x-y\|^2 = 4-3+9 = 10$, donc $\|x-y\| = \sqrt{10}$.
$\|2x-y\|^2 = 4\times 4 - 4\times\frac{3}{2} + 9 = 16-6+9 = 19$, donc $\sqrt{19}$.

— Contrôle par le parallélogramme : $16+10 = 26 = 2\times 4 + 2\times 9$.

c) $\cos\theta = \frac{3/2}{2\times 3} = \frac{1}{4}$.

d) Non : l'inégalité triangulaire impose $\|x+y\| \le 5$. (Avec 6, on trouverait $\langle x,y\rangle = \frac{36-13}{2} = 11{,}5 > 6 = \|x\|\|y\|$, contraire à Cauchy-Schwarz.)

Réponse. $\langle x,y\rangle = \frac{3}{2}$; $\|x-y\| = \sqrt{10}$, $\|2x-y\| = \sqrt{19}$; $\cos\theta = \frac{1}{4}$; d) impossible.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Théorème de la médiane

a) $\overrightarrow{AB} = u - v$ et $\overrightarrow{AC} = -u - v$. En développant :

$$AB^2 + AC^2 = \|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

— (les doubles produits $\mp 2\langle u, v\rangle$ se compensent). Or $\|v\| = AM$ et $\|u\| = MB = \frac{BC}{2}$:
$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2\frac{BC^2}{4} = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$.

b) C'est l'identité $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$: dans le parallélogramme construit sur u et v, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des côtés.

c) $25 + 49 = 2AM^2 + 32$, donc $AM^2 = 21$ et $AM = \sqrt{21} \approx 4{,}58$.

Réponse. $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$; $AM = \sqrt{21}$.

Correction de l'exercice 10 – Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire

a) En élevant au carré (quantités positives) :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2, \qquad (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

— L'égalité équivaut à $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$.

b) C'est le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz : $y = \lambda x$. Alors $\langle x, y\rangle = \lambda\|x\|^2$ et $\|x\|\|y\| = |\lambda|\|x\|^2$: égalité si et seulement si $\lambda = |\lambda|$, soit $\lambda > 0$ ($y \neq 0$).

c) Pour la norme $\sqrt{\int f^2}$: si et seulement si $g = \lambda f$ avec $\lambda > 0$.

d) $x = (1, 0)$ et $y = (1, 1)$: $\max(1, 0) + \max(1, 1) = 2$ et $\max(2, 1) = 2$. Égalité, mais x et y ne sont pas colinéaires : pour cette norme non euclidienne, les « segments » de la sphère unité permettent l'égalité.

Réponse. Égalité $\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow y = \lambda x$, $\lambda > 0$; faux pour la norme max.

Correction de l'exercice 11 – Angle entre deux polynômes

a) $\langle X^p, X^q\rangle = \int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+q+1}$. En particulier $\|X^p\| = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

b) $\cos(1, X) = \frac{1/2}{1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: angle $\frac{\pi}{6}$.

— $\cos(X, X^2) = \frac{1/4}{\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0{,}968$: angle $\approx 0{,}25$ rad.

c) En général :

$$\cos(X^n, X^{n+1}) = \frac{\frac{1}{2n+2}}{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}} = \frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}{2n+2} = \sqrt{1 - \frac{1}{(2n+2)^2}} \to 1$$

— Les monômes deviennent « presque colinéaires » : sur $[0, 1]$, t^n et t^{n+1} ont presque la même forme. C'est ce qui rend la base $(1, X, \ldots, X^n)$ très mal adaptée aux calculs d'approximation (matrice de Hilbert), et motive l'orthonormalisation.

Réponse. $\langle X^p, X^q\rangle = \frac{1}{p+q+1}$; $(1, X)$: $\frac{\pi}{6}$; $\cos(X^n, X^{n+1}) = \sqrt{1 - \frac{1}{(2n+2)^2}} \to 1$.

Correction de l'exercice 12 – Minimiser sous une contrainte linéaire

a) Pour tout (x, y, z) vérifiant la contrainte :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$14^2 = (x+2y+3z)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(1+4+9)$$

— donc $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{196}{14} = 14$. Égalité si et seulement si $(x,y,z) = \lambda(1,2,3)$; la contrainte donne $14\lambda = 14$, $\lambda = 1$. Minimum 14, atteint en $(1,2,3)$.

b) On cherche le point du plan $x+2y+3z = 14$ le plus proche de l'origine : c'est le projeté orthogonal de O sur le plan, dirigé par le vecteur normal $(1,2,3)$. La distance de O au plan est $\sqrt{14} = \frac{14}{\sqrt{14}}$.

c) $c^2 = \langle u, a\rangle^2 \le \|u\|^2\|a\|^2$, donc $\|u\|^2 \ge \frac{c^2}{\|a\|^2}$, atteint en $u = \frac{c}{\|a\|^2}a$.

Réponse. Minimum 14 en $(1,2,3)$; en général $\frac{c^2}{\|a\|^2}$ en $u = \frac{c}{\|a\|^2}a$.

Correction de l'exercice 13 – Encadrer une intégrale

a) Intégration par parties : $I = \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt = e - (e-1) = 1$.

b) $\int_0^1 t^2 = \frac{1}{3}$ et $\int_0^1 e^{2t} = \frac{e^2-1}{2} \approx 3{,}195$:

$$I^2 = 1 \le \frac{1}{3}\times 3{,}195 \approx 1{,}065$$

— L'inégalité est vérifiée, et assez fine : t et e^t sont « presque colinéaires » sur $[0,1]$ (toutes deux croissantes).

c) Avec $\sqrt{t}$ et e^{-t} :

— $J^2 \le \int_0^1 t\,dt \times \int_0^1 e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}\times\frac{1-e^{-2}}{2} \approx 0{,}216$, donc $J \le 0{,}465$.

— (Valeur numérique : $J \approx 0{,}379$. L'écart vient de ce que $\sqrt{t}$ croît quand e^{-t} décroît : loin de la colinéarité.)

Réponse. $I = 1$; $1 \le \frac{e^2-1}{6} \approx 1{,}065$; $J \le \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2} \approx 0{,}465$.

Correction de l'exercice 14 – Norme sous-multiplicative sur les matrices

a) $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ est le produit scalaire de la ligne i de A par la colonne j de B. Par Cauchy-Schwarz :

$$(AB)_{ij}^2 \le \left(\sum_k a_{ik}^2\right)\left(\sum_k b_{kj}^2\right)$$

— En sommant sur i et j : $\|AB\|^2 \le \sum_i\sum_k a_{ik}^2 \times \sum_j\sum_k b_{kj}^2 = \|A\|^2\|B\|^2$.

b) $\|I_n\| = \sqrt{n}$: cette norme ne vaut pas 1 en l'identité (contrairement aux normes subordonnées).

c) $\|A\|^2 = \|B\|^2 = 3$. $AB = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\|AB\|^2 = 4+1+1+1 = 7 \le 9$.

Réponse. $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$; $\|I_n\| = \sqrt{n}$; c) $7 \le 9$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : produit scalaire défini par une matrice 2x2

a) $x^{\mathsf T}Sy$ est linéaire en x et en y (produit matriciel). Symétrie : $x^{\mathsf T}Sy$ est un scalaire, égal à sa transposée $y^{\mathsf T}S^{\mathsf T}x = y^{\mathsf T}Sx$.

b) $\varphi(x,x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$. Si $a > 0$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\varphi(x,x) = a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}x_2^2$$

— Si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$: somme de deux carrés à coefficients positifs, nulle seulement si $x_2 = 0$ puis $x_1 = 0$. Réciproquement, $\varphi(e_1, e_1) = a$ doit être > 0, et pour $x = \left(-\frac{b}{a}, 1\right)$, $\varphi(x,x) = \frac{ac-b^2}{a}$ doit être > 0.

c) $a = 2 > 0$, $ac - b^2 = 1 > 0$: produit scalaire. Gram-Schmidt : $\varphi(e_1, e_1) = 2$, donc $f_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$. Puis $v_2 = e_2 - \frac{\varphi(e_2,e_1)}{\varphi(e_1,e_1)}e_1 = e_2 - \frac{1}{2}e_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$; $\varphi(v_2, v_2) = 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}$, donc $f_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

d) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. $SP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, et avec $P^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$:

$$P^{\mathsf{T}}SP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = I_2$$

— la matrice du produit scalaire dans une base orthonormée est l'identité.

Réponse. Produit scalaire ssi $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$; $f_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$, $f_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$; $P^{\mathsf{T}}SP = I_2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).