Plaquette 4 – Projection orthogonale, distances et meilleure approximation

Espaces préhilbertiens — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Projection orthogonale.

— $p_F(x)$ est caractérisé par : $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$. Il réalise

$$d(x,F) = \min_{y \in F} \|x-y\| = \|x - p_F(x)\|, \qquad \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x,F)^2$$

— Base orthonormée (e_i) de F : $p_F(x) = \sum_i \langle x, e_i\rangle e_i$.

— **Droite** $\mathrm{Vect}(u)$: $p(x) = \dfrac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u$, matrice $\dfrac{uu^{\mathsf T}}{u^{\mathsf T}u}$.

— **Hyperplan** $n^\perp$: $p(x) = x - \dfrac{\langle x,n\rangle}{\|n\|^2}n$, $d(x,n^\perp) = \dfrac{|\langle x,n\rangle|}{\|n\|}$; **réflexion** : $s(x) = x - 2\dfrac{\langle x,n\rangle}{\|n\|^2}n$.

— Projection sur l'image de A (colonnes libres) : $P = A(A^{\mathsf T}A)^{-1}A^{\mathsf T}$.

— Un projecteur p est **orthogonal** $\Leftrightarrow \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$ pour tous x, y $\Leftrightarrow$ sa matrice dans une base orthonormée est **symétrique**.

Correction de l'exercice 1 – Matrice de projection sur une droite

a) $p(x) = \dfrac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u = \dfrac{1}{6}u\,(u^{\mathsf T}x)$, donc

$$P = \frac{uu^{\mathsf T}}{6} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $P^2 = \dfrac{u(u^{\mathsf T}u)u^{\mathsf T}}{36} = \dfrac{6uu^{\mathsf T}}{36} = P$; P est symétrique ; $\mathrm{tr}P = \dfrac{1+4+1}{6} = 1 = \dim D$.

c) $\langle x,u\rangle = 1+2-1 = 2$, $p(x) = \dfrac{2}{6}u = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$. Par Pythagore :

— $d(x,D)^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2 = 3 - \dfrac{4}{6} = \dfrac{7}{3}$, donc $d(x,D) = \sqrt{\dfrac{7}{3}} \approx 1{,}53$.

Réponse. $P = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $d(x,D) = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Correction de l'exercice 2 – Projection et réflexion par rapport à un plan

a) $p(x) = x - \dfrac{\langle x,n\rangle}{6}n$ ($\|n\|^2 = 6$), donc

$$P = I_3 - \frac{nn^{\mathsf T}}{6} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $S = I_3 - \dfrac{2nn^{\mathsf T}}{6} = 2P - I_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Symétrique ; colonnes de norme $\dfrac{\sqrt{4+1+4}}{3} = 1$ et deux à deux orthogonales ($2+2-4=0$, $-4+2+2=0$, $-2+4-2=0$) : orthogonale.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\langle a, n\rangle = 1 - 1 + 2 = 2$:

— $p(a) = (1,1,1) - \frac{2}{6}(1,-1,2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (contrôle : $\frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 0$) ;

— $s(a) = (1,1,1) - \frac{4}{6}(1,-1,2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$;

— $d(a, H) = \frac{|\langle a, n\rangle|}{\|n\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Réponse. $P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $S = 2P - I_3$; $p(a) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$, $s(a) = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$, $d = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Correction de l’exercice 3 – Réflexion de Householder

a) $\|u\| = \sqrt{9 + 16} = 5 = \|v\|$.

b) $n = (-2, 4, 0)$, $\|n\|^2 = 20$, $\langle u, n\rangle = -6 + 16 = 10$. Par la formule de la réflexion :

$$s(u) = u - 2\frac{\langle u, n\rangle}{\|n\|^2} n = (3,4,0) - 2 \times \frac{10}{20}(-2,4,0) = (5,0,0) = v$$

— En général : $\langle u, u - v\rangle = \frac{1}{2}\|u - v\|^2$ quand $\|u\| = \|v\|$, et le calcul donne toujours $s(u) = u - (u - v) = v$.

c) $S = I_3 - \frac{2nn^{\mathsf{T}}}{20} = I_3 - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 \\ -8 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Une réflexion est orthogonale : elle conserve les normes. En envoyant la première colonne u d’une matrice sur $(\|u\|, 0, \dots, 0)$, on annule d’un coup tous ses coefficients sous la diagonale, de façon **numériquement stable** (pas de division par un petit pivot). En répétant sur les colonnes suivantes, on obtient $A = QR$.

Réponse. $n = (-2, 4, 0)$, $s(u) = v$; $S = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 4 – Reconnaître un projecteur orthogonal

a) ($\Rightarrow$) Écrivons $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $x - p(x) \in \ker p$; si $\ker p \perp \mathrm{Im} p$:

$$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle + \langle p(x), y - p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$$

— et de même $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$. ($\Leftarrow$) Si $x \in \ker p$ et $y \in \mathrm{Im} p$: $\langle x, y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), y\rangle = 0$.

b) En base orthonormée, $\langle Px, y\rangle = y^{\mathsf{T}}Px$ et $\langle x, Py\rangle = y^{\mathsf{T}}P^{\mathsf{T}}x$; l’égalité pour tous x, y équivaut à $P = P^{\mathsf{T}}$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$: projecteur, mais non symétrique, donc non orthogonal ($\mathrm{Im} A = \mathrm{Vect}(1,1)$, $\ker A = \mathrm{Vect}(0,1)$, non orthogonaux). $B^2 = B$ et $B^{\mathsf{T}} = B$: projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(1,1)$.

d) Pour $x = (2, -1)$: $Ax = (2, 2)$, et $\|Ax\| = 2\sqrt{2} > \sqrt{5} = \|x\|$. Pour un projecteur orthogonal, Pythagore donne $\|p(x)\| \le \|x\|$ toujours.

Réponse. Orthogonal $\Leftrightarrow$ auto-adjoint $\Leftrightarrow$ matrice symétrique (en base orthonormée) ; A : projecteur non orthogonal, B : orthogonal ; $\|A(2,-1)\| = 2\sqrt{2} > \sqrt{5}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Projection sur l'image d'une matrice

a) Le projeté est dans F : $p(x) = A\lambda$. La condition $x - A\lambda \perp F$ s'écrit : orthogonal à chaque colonne de A, soit

$$A^{\mathsf{T}}(x - A\lambda) = 0 \Leftrightarrow A^{\mathsf{T}}A\,\lambda = A^{\mathsf{T}}x$$

b) $A^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, inversible (colonnes libres), d'inverse $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Puis $A(A^{\mathsf{T}}A)^{-1}$ a pour lignes $\frac{1}{3}(2,-1)$, $\frac{1}{3}(-1,2)$, $\frac{1}{3}(1,1)$, et en multipliant par $A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

— $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $n = (1,0,1) \wedge (0,1,1) = (0-1,\ 0-1,\ 1-0) = (-1,-1,1)$, $\|n\|^2 = 3$:
$I_3 - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ redonne exactement P.

Réponse. Équations normales $A^{\mathsf{T}}A\lambda = A^{\mathsf{T}}x$; $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 6 – Distance à un hyperplan de R4

a) $H = n^{\perp}$ avec $n = (1,1,1,1)$, donc $H^{\perp} = \mathrm{Vect}(n)$.

b) $\langle a, n\rangle = 10$, $\|n\| = 2$:

$$d(a,H) = \frac{|\langle a,n\rangle|}{\|n\|} = \frac{10}{2} = 5, \qquad p_H(a) = a - \frac{10}{4}n = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

c) Même calcul avec x quelconque. Le projeté $p_H(x) = x - \overline{x}\,n$, où $\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_4}{4}$ est la **moyenne** : on **centre** les données. La composante perpendiculaire $\overline{x}\,n$ porte la moyenne, et $\|p_H(x)\|^2 = \sum (x_i - \overline{x})^2$ est 4 fois la variance. Pour a : $\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 5$, variance 1,25.

Réponse. $H^{\perp} = \mathrm{Vect}(1,1,1,1)$; $d(a,H) = 5$, $p_H(a) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; projeter sur H = centrer.

Correction de l'exercice 7 – Meilleure approximation affine de t² sur [0, 1]

a) Dans $C([0,1])$ avec $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$, $m = d(t^2, \mathbb{R}_1[t])^2$: le minimum existe et est atteint au projeté orthogonal.

b) On impose $\langle t^2 - at - b, 1\rangle = 0$ et $\langle t^2 - at - b, t\rangle = 0$:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0 \end{cases}$$

— En multipliant : $3a + 6b = 2$ et $4a + 6b = 3$, d'où $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$. Le projeté est $t - \frac{1}{6}$.

c) Par Pythagore, $m = \|t^2\|^2 - \|p(t^2)\|^2$, ou directement $m = \langle t^2 - p, t^2\rangle$ (car $t^2 - p \perp p$) :

— $m = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right) t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{36 - 45 + 10}{180} = \frac{1}{180}$.

Réponse. $(a,b) = \left(1, -\frac{1}{6}\right)$; $m = \frac{1}{180}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Approcher l'exponentielle par une droite sur $[-1, 1]$

a) $\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0$: base orthogonale $(1, t)$ de $\mathbb{R}_1[t]$, et le projeté est $\frac{\langle f,1\rangle}{\|1\|^2}1 + \frac{\langle f,t\rangle}{\|t\|^2}t$.

b) $\langle f, 1\rangle = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{sh}1$, $\|1\|^2 = 2$: $a = \mathrm{sh}1 \approx 1{,}1752$.

— $\langle f, t\rangle = \left[(t-1)\mathrm{e}^t\right]_{-1}^{1} = 0 + 2\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}$ et $\|t\|^2 = \frac{2}{3}$: $b = \frac{3}{\mathrm{e}} \approx 1{,}1036$.

c) Par Pythagore, l'erreur vaut $\|f\|^2 - 2a^2 - \frac{2}{3}b^2$ avec $\|f\|^2 = \int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{sh}2$:

$$\mathrm{sh}2 - 2\mathrm{sh}^2 1 - \frac{6}{\mathrm{e}^2} \approx 3{,}6269 - 2{,}7622 - 0{,}8120 \approx 0{,}0527$$

d) Pour $1 + t$: $\int_{-1}^{1}(\mathrm{e}^t - 1 - t)^2\,\mathrm{d}t$ est plus grand, puisque $1 + t$ est un autre élément de $\mathbb{R}_1[t]$ et que le projeté minimise la distance. (Numériquement, on trouve environ 0,121, plus du double.) La tangente est optimale **près de** 0, le projeté l'est **en moyenne sur tout l'intervalle**.

Réponse. $a = \mathrm{sh}1 \approx 1{,}175$, $b = \frac{3}{\mathrm{e}} \approx 1{,}104$; erreur $\approx 0{,}0527$.

Correction de l'exercice 9 – Plan des moindres carrés

a) M a pour lignes $(1, x_i, y_i)$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \min_{\theta} \|Z - M\theta\|^2$$

— le minimum est atteint quand $M\theta$ est le projeté de Z sur $\mathrm{Im}M$.

b) $M^{\mathsf{T}}M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $M^{\mathsf{T}}Z = (9, 6, 6)$. Le système est symétrique en b et c ; avec $b = c$: $4a + 4b = 9$ et $2a + 3b = 6$. Donc $b = c = 1{,}5$ et $a = 0{,}75$ (et l'on vérifie que cette solution est l'unique solution, $M^{\mathsf{T}}M$ étant inversible).

— $z = 0{,}75 + 1{,}5x + 1{,}5y$.

c) Valeurs ajustées : 0,75 ; 2,25 ; 2,25 ; 3,75. Résidus : 0,25 ; −0,25 ; −0,25 ; 0,25. Somme des carrés : $4 \times 0{,}0625 = 0{,}25$. Les résidus sont orthogonaux à chaque colonne de M (par exemple, leur somme est nulle).

Réponse. $z = 0{,}75 + 1{,}5x + 1{,}5y$; somme des carrés des résidus 0,25.

Correction de l'exercice 10 – Distance aux matrices de trace nulle

a) $\langle I_n, M\rangle = \mathrm{tr}(M)$: $M \in T \Leftrightarrow M \perp I_n$.

b) Projection sur l'hyperplan $I_n^{\perp}$ avec $\|I_n\|^2 = n$:

$$p(M) = M - \frac{\mathrm{tr}M}{n}I_n, \qquad d(M, T) = \frac{|\mathrm{tr}M|}{\sqrt{n}}$$

c) $\mathrm{tr}M = 8$, $n = 2$: $p(M) = M - 4I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (trace nulle), et $d(M, T) = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Contrôle : $\|M - p(M)\| = \|4I_2\| = 4\sqrt{2}$.

Réponse. $p(M) = M - \frac{\mathrm{tr}M}{n}I_n$, $d = \frac{|\mathrm{tr}M|}{\sqrt{n}}$; c) $4\sqrt{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Distance de X³ aux polynômes de degré au plus 1

La base $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ est orthogonale ($\int_{-1}^{1} t = 0$). Le projeté est

$$p = \frac{\langle X^3, 1\rangle}{\|1\|^2} + \frac{\langle X^3, X\rangle}{\|X\|^2} X$$

— $\langle X^3, 1\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 = 0$ (imparité) ; $\langle X^3, X\rangle = \int_{-1}^{1} t^4 = \frac{2}{5}$ et $\|X\|^2 = \frac{2}{3}$.

— $p = \frac{2/5}{2/3} X = \frac{3}{5} X$.

— Distance : $d^2 = \langle X^3 - p, X^3\rangle = \int_{-1}^{1} t^6 - \frac{3}{5}\int_{-1}^{1} t^4 = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{50-42}{175} = \frac{8}{175}$.

— $d = \sqrt{\frac{8}{175}} \approx 0{,}214$. (Le polynôme $X^3 - \frac{3}{5}X$ est, à un facteur près, le polynôme de Legendre de degré 3.)

Réponse. $p = \frac{3}{5}X$; $d = \sqrt{\frac{8}{175}} \approx 0{,}214$.

Correction de l’exercice 12 – Distance entre deux droites de l’espace

a) $\det(\overrightarrow{AB}, u, v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1(0-1) + 0 = 1 \neq 0$: les trois vecteurs ne sont pas coplanaires, les droites non plus.

b) $M = (t, 0, 0)$, $N = (0, 1+s, 1)$, $\overrightarrow{MN} = (-t, 1+s, 1)$. Conditions :

$$\langle \overrightarrow{MN}, u\rangle = -t = 0, \qquad \langle \overrightarrow{MN}, v\rangle = 1 + s = 0$$

— $M = (0, 0, 0)$, $N = (0, 0, 1)$: la perpendiculaire commune est l’axe (Oz) entre ces points.

c) $d = MN = 1$. Formule : $u \wedge v = (0, 0, 1)$, de norme 1, et $|\det(\overrightarrow{AB}, u, v)| = 1$: $d = 1$. (C’est la longueur de la projection de $\overrightarrow{AB}$ sur la direction commune $u \wedge v$.)

Réponse. Non coplanaires (det = 1) ; $M = O$, $N = (0, 0, 1)$; $d = 1$.

Correction de l’exercice 13 – Angle entre une droite et un plan

a) $n = (1, 1, 1)$, $\langle u, n\rangle = 1$, $\|n\|^2 = 3$: $p(u) = u - \frac{1}{3}n = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

b) $\|p(u)\|^2 = \frac{4+1+1}{9} = \frac{2}{3}$:

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}816, \qquad \theta \approx 0{,}615 \text{ rad } (\approx 35{,}3^\circ)$$

c) Par Pythagore, $\|u\|^2 = \|p(u)\|^2 + \|u - p(u)\|^2$, et $\|u - p(u)\| = \frac{|\langle u, n\rangle|}{\|n\|}$; donc $\sin\theta = \frac{\|u - p(u)\|}{\|u\|} = \frac{|\langle u, n\rangle|}{\|u\|\|n\|}$. Ici $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, et $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

Réponse. $p(u) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$; $\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\theta \approx 35{,}3^\circ$.

Correction de l’exercice 14 – Un projecteur orthogonal diminue les normes

a) $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \perp x - p(x)$. Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$

— égalité si et seulement si $x = p(x)$, c’est-à-dire $x \in \mathrm{Im} p$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $p(y+tz)=y$, donc $\|y\|^2 \le \|y+tz\|^2 = \|y\|^2 + 2t\langle y,z\rangle + t^2\|z\|^2$, soit $2t\langle y,z\rangle + t^2\|z\|^2 \ge 0$ pour tout t. Si $\langle y,z\rangle \neq 0$, en prenant t petit de signe opposé à $\langle y,z\rangle$, le terme $2t\langle y,z\rangle$ (d'ordre t) l'emporte sur $t^2\|z\|^2$ et rend la somme négative : contradiction. Donc $\langle y,z\rangle = 0$.

c) b) montre $\mathrm{Im}\, p \perp \ker p$: p est orthogonal. Avec a), on a l'équivalence. (Exemple de projecteur oblique augmentant une norme : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ envoie $(1,1)$ sur $(2,0)$.)

Réponse. Orthogonal $\Rightarrow \|p(x)\| \le \|x\|$ (Pythagore) ; réciproque par $y+tz$; équivalence.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : régression linéaire et coefficient de détermination

a) On minimise $\sum (y_i - ax_i - b)^2 = \|Y - (aX + b\mathbf{1})\|^2$ sur F : le minimum est atteint au projeté. Les équations normales donnent $a = 1{,}4$, $b = 0{,}9$ et

$$\hat{Y} = (0{,}9;\ 2{,}3;\ 3{,}7;\ 5{,}1)$$

b) $Y - \hat{Y} \in F^\perp$; or $\hat{Y} - \overline{Y} \in F$ (car $\overline{Y} = 3 \cdot \mathbf{1} \in F$). Donc ils sont orthogonaux, et Pythagore appliqué à $Y - \overline{Y} = (\hat{Y} - \overline{Y}) + (Y - \hat{Y})$ donne la décomposition.

c) $\|Y - \overline{Y}\|^2 = 4 + 1 + 1 + 4 = 10$; $\|Y - \hat{Y}\|^2 = 0{,}01 + 0{,}09 + 0{,}09 + 0{,}01 = 0{,}2$; donc $\|\hat{Y} - \overline{Y}\|^2 = 9{,}8$ (contrôle direct : $2{,}1^2 + 0{,}7^2 + 0{,}7^2 + 2{,}1^2 = 9{,}8$).

— $R^2 = \dfrac{9{,}8}{10} = 0{,}98$: 98 % de la dispersion des y_i autour de leur moyenne est « expliquée » par la droite. Géométriquement, $R^2 = \cos^2$ de l'angle entre $Y - \overline{Y}$ et $\hat{Y} - \overline{Y}$.

Réponse. $\hat{Y} = (0{,}9; 2{,}3; 3{,}7; 5{,}1)$; $10 = 9{,}8 + 0{,}2$; $R^2 = 0{,}98$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).