Plaquette 5 – Isométries, matrices orthogonales et applications

Espaces préhilbertiens — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Une **isométrie vectorielle** conserve la norme, donc (par polarisation) le produit scalaire ; sa matrice dans une base orthonormée est **orthogonale** ($Q^{\mathsf{T}}Q = I_n$), de déterminant ± 1. En dimension 2, ce sont les rotations et les réflexions ; en dimension 3, une rotation se reconnaît à son **axe** ($\ker(Q - I_3)$) et à son **angle** ($\operatorname{tr} Q = 1 + 2\cos\theta$). On termine par des applications : représentation d'une forme linéaire par un vecteur, polynômes orthogonaux, séries de Fourier, matrices de Gram et volumes, ajustements.

Exercice 1 – Isométrie et produit scalaire

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout x.

a) Montrer que $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous x, y.

b) En déduire que f est bijective et que l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

c) Montrer que la matrice Q de f dans une base orthonormée vérifie $Q^{\mathsf{T}}Q = I_n$, puis $\det Q = \pm 1$.

d) Une application qui conserve l'orthogonalité (mais pas forcément les normes) est-elle une isométrie ?

Exercice 2 – Les matrices orthogonales de taille 2

Soit $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe θ tel que $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$, puis que $(c, d) = \pm(-\sin\theta, \cos\theta)$.

b) En déduire que $Q = R_\theta$ (si $\det Q = 1$) ou $Q = S_\theta$ (si $\det Q = -1$).

c) Montrer que S_θ est la réflexion par rapport à la droite d'angle $\dfrac{\theta}{2}$.

d) Identifier $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 – Composer deux réflexions

a) Calculer $S_\alpha S_\beta$ et montrer que c'est la rotation $R_{\alpha-\beta}$.

b) Interpréter : la composée des réflexions d'axes faisant les angles $\dfrac{\alpha}{2}$ et $\dfrac{\beta}{2}$ est la rotation d'angle double de l'angle entre les axes.

c) Calculer $R_\theta S_0 R_{-\theta}$ et l'interpréter.

d) Montrer que toute rotation du plan est la composée de deux réflexions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Axe et angle d'une rotation de R3

Soit $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $Q \in SO_3(\mathbb{R})$.

b) Déterminer l'axe de la rotation (vecteurs fixes).

c) Déterminer l'angle θ au signe près, grâce à la trace.

d) Orienter l'axe par $a = (1, 1, 1)$ et déterminer le signe de θ avec $x = (1, -1, 0)$.

Exercice 5 – Représenter une forme linéaire par un vecteur

Sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ$, soit $\varphi(P) = P(0)$.

a) Justifier qu'il existe un unique $A \in E$ tel que $\varphi(P) = \langle A, P\rangle$ pour tout P.

b) En écrivant $A = a + bX + cX^2$, montrer que (a, b, c) est solution d'un système dont la matrice est la matrice de Hilbert H_3.

c) Sachant que $H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$, en déduire A.

d) Vérifier sur $P = 1$ et $P = X$.

Exercice 6 – Polynômes de Legendre par la formule de Rodrigues

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\left[(X^2 - 1)^n\right]$, et $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 PQ$.

a) Calculer L_1, L_2, L_3.

b) Montrer, par n intégrations par parties, que $\langle L_n, Q\rangle = 0$ pour tout Q de degré $< n$ (on remarquera que les dérivées d'ordre $< n$ de $(X^2 - 1)^n$ s'annulent en ± 1).

c) En déduire que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$, et comparer avec les calculs de Gram-Schmidt.

Exercice 7 – Coefficients de Fourier d'une parabole

Sur $C([-\pi, \pi])$ avec $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$, on cherche la meilleure approximation de $f(t) = t^2$ dans $F = \mathrm{Vect}(1, \cos, \sin)$.

a) Rappeler que $(1, \cos, \sin)$ est orthogonale, avec $\|1\|^2 = 2\pi$ et $\|\cos\|^2 = \|\sin\|^2 = \pi$.

b) Calculer les trois coefficients $\frac{\langle f, g\rangle}{\|g\|^2}$.

c) En déduire le projeté et l'erreur quadratique.

Exercice 8 – Matrice de Gram et volume

Soient $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{R}^n$, A la matrice $n \times p$ de colonnes u_i et $G = (\langle u_i, u_j\rangle)$ leur matrice de Gram.

a) Montrer que $G = A^{\mathsf{T}}A$.

b) Montrer que G est inversible si et seulement si la famille est libre (étudier $GX = 0 \Rightarrow X^{\mathsf{T}}GX = \|AX\|^2 = 0$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Pour $p = n$, montrer que $\det G = (\det A)^2$: c'est le carré du volume du parallélépipède construit sur les u_i.

d) Application : volume du parallélépipède construit sur $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, calculé par Gram.

Exercice 9 – Inégalité d'Hadamard

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de colonnes $u_1, \dots, u_n$.

a) Si la famille est liée, que vaut $\det A$?

b) Sinon, on applique Gram-Schmidt : $A = QR$ avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure de diagonale $r_{ii} = \|v_i\|$, où v_i est le vecteur orthogonalisé. Montrer que $r_{ii} \leq \|u_i\|$.

c) En déduire l'inégalité d'Hadamard $|\det A| \leq \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|$, et le cas d'égalité.

d) Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 – Endomorphismes symétriques

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien tel que $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ pour tous x, y (endomorphisme **symétrique**).

a) Montrer que sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

b) Soient x, y non nuls avec $f(x) = \lambda x$, $f(y) = \mu y$ et $\lambda \neq \mu$. Montrer que $x \perp y$.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; retrouver les vecteurs propres et vérifier leur orthogonalité. En déduire une base orthonormée qui diagonalise A et la relation $A = QDQ^{\mathsf{T}}$.

Exercice 11 – Régression passant par l'origine : la loi de Hooke

On suspend des masses à un ressort et l'on mesure l'allongement y (en cm) en fonction de la force x (en N) :

x	1	2	3	4
y	2,1	3,9	6,2	7,8

La loi de Hooke prévoit $y = kx$.

a) Interpréter la recherche de k minimisant $\sum (y_i - kx_i)^2$ comme une projection sur une droite de $\mathbb{R}^4$.

b) En déduire $k = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$ et le calculer.

c) Calculer les résidus et vérifier qu'ils sont orthogonaux à X.

Exercice 12 – La transposition est une isométrie

Sur $M_n(\mathbb{R})$ muni de $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}B)$, soit $T(M) = M^{\mathsf{T}}$.

a) Montrer que T est une isométrie.

b) Montrer que c'est la symétrie orthogonale par rapport à S_n.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Pour $Q \in O_n(\mathbb{R})$, montrer que $M \mapsto QM$ et $M \mapsto MQ$ sont des isométries de $M_n(\mathbb{R})$.
d) En déduire que $\|Q\| = \sqrt{n}$ pour toute matrice orthogonale Q.

Exercice 13 – Angle entre deux plans

L'angle $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ entre deux plans de $\mathbb{R}^3$ est celui de leurs vecteurs normaux (au signe près).

a) Calculer l'angle entre $P_1 : x + y = 0$ et $P_2 : y + z = 0$.
b) Déterminer la droite $P_1 \cap P_2$ et vérifier qu'elle est orthogonale aux deux normales.
c) Pour quelle valeur de m les plans P_1 et $P_m : x + my + z = 0$ sont-ils perpendiculaires ?

Exercice 14 – Une isométrie fixant un vecteur

Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^3$ et a un vecteur unitaire tel que $f(a) = a$.

a) Montrer que le plan $P = a^{\perp}$ est stable par f.
b) En déduire que, dans une base orthonormée (a, e_2, e_3), la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in O_2(\mathbb{R})$.
c) Décrire les deux possibilités (selon $\det B$) et les interpréter géométriquement.

Exercice 15 – Synthèse : les isométries qui conservent un carré

Soit C le carré de sommets $(\pm 1, \pm 1)$ dans le plan euclidien. On cherche les $Q \in O_2(\mathbb{R})$ telles que $Q(C) = C$.

a) Montrer qu'une telle Q envoie l'ensemble des quatre sommets sur lui-même (ce sont les points de C les plus éloignés de l'origine).
b) En déduire que $Q(1, 1) \in \{(\pm 1, \pm 1)\}$ et $Q(1, -1) \perp Q(1, 1)$, puis qu'il y a au plus 8 possibilités.
c) Décrire les 8 matrices : 4 rotations et 4 réflexions (préciser angles et axes).
d) Vérifier que la composée de deux d'entre elles en est encore une (exemple : réflexion d'axe (Ox) puis réflexion d'axe $y = x$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).