Plaquette 3 – Orthogonalité, bases orthonormées et procédé de Gram-Schmidt

Espaces préhilbertiens — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Dans une **base orthonormée**, tout devient simple : les coordonnées sont des produits scalaires, la norme se calcule par Pythagore, la matrice de passage est orthogonale. On en fabrique une par le **procédé de Gram-Schmidt** : on retire à chaque vecteur ses composantes sur les vecteurs déjà construits, puis on normalise. Pour l'**orthogonal** d'un sous-espace F, on écrit que x est orthogonal à chaque vecteur d'une famille génératrice de F : cela donne un système d'équations. En dimension finie, $E = F \oplus F^{\perp}$ et $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$.

Exercice 1 – Gram-Schmidt dans R3

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, orthonormaliser la base $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (0,1,1)$.

a) Construire e_1, puis e_2, puis e_3.

b) Vérifier que la famille obtenue est orthonormée.

c) Écrire les coordonnées de $w = (2,3,1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) et vérifier $\|w\|^2$.

Exercice 2 – Base orthonormée d'un plan de R4

Dans $\mathbb{R}^4$ canonique, soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1,1,1,1)$ et $u_2 = (1,2,3,4)$.

a) Construire une base orthonormée (e_1, e_2) de F.

b) Calculer le projeté orthogonal de $x = (1,0,0,0)$ sur F.

c) En déduire la distance de x à F.

Exercice 3 – Polynômes de Legendre en degré 2

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer $\langle X^p, X^q\rangle$ pour $p + q \leq 4$ et justifier que $\langle 1, X\rangle = \langle X, X^2\rangle = 0$.

b) Orthogonaliser $(1, X, X^2)$ et obtenir $(1, X, X^2 - \frac{1}{3})$.

c) Normaliser cette base.

d) Écrire $X^2 + X$ dans la base orthonormée obtenue.

Exercice 4 – Coordonnées dans une base orthonormée

Soient $e_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)$, $e_2 = \frac{1}{3}(2,1,-2)$, $e_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1)$.

a) Vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer les coordonnées de $w = (3,0,3)$ sans résoudre de système.

c) Vérifier l'égalité de Parseval.

d) La matrice Q de colonnes e_1, e_2, e_3 vérifie-t-elle $Q^{\mathsf{T}} = Q^{-1}$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Orthogonal d'un plan de R4

Dans $\mathbb{R}^4$ canonique, soit $F = \mathrm{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1))$.

a) Déterminer $F^\perp$ par un système d'équations, puis une base.

b) Vérifier que $\dim F + \dim F^\perp = 4$ et que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

c) Décomposer $x = (1,2,3,4)$ selon $F \oplus F^\perp$.

Exercice 6 – Propriétés de l'orthogonal

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace préhilbertien E.

a) Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace et que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

b) Montrer que $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$, et que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

c) Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$, avec égalité si E est de dimension finie.

d) Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, avec égalité en dimension finie.

Exercice 7 – L'orthogonal des matrices symétriques

On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}B)$.

a) Rappeler pourquoi $A_n \subset S_n^\perp$.

b) En déduire, par les dimensions, que $S_n^\perp = A_n$.

c) Déterminer le projeté orthogonal de M sur S_n et la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ à S_2.

Exercice 8 – Fonctions de moyenne nulle

Sur $E = C([0,1],\mathbb{R})$, on pose $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$, et C le sous-espace des fonctions constantes.

a) Montrer que $C^\perp$ est l'ensemble des fonctions d'intégrale nulle.

b) Montrer que $E = C \oplus C^\perp$ et donner la décomposition de f.

c) Calculer la distance de $f(t) = t^2$ à C, et interpréter en termes de variance.

Exercice 9 – La famille trigonométrique

Sur $E = C([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} fg$, on considère $c_0 = 1$, $c_k = \cos(k\,\cdot)$, $s_k = \sin(k\,\cdot)$ $(k \geq 1)$.

a) Montrer que $(c_0, c_1, s_1, \ldots, c_n, s_n)$ est une famille orthogonale.

b) Calculer les normes et en déduire une famille orthonormée.

c) En déduire que $\dim E = +\infty$.

Exercice 10 – L'inégalité de Bessel et la somme des 1/k²

Sur $C([-\pi,\pi])$ muni de $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$, soit $e_k(t) = \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}$, $k \geq 1$ (famille orthonormée).

a) Démontrer l'inégalité de Bessel : $\sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle^2 \leq \|f\|^2$.

b) Pour $f(t) = t$, calculer $\langle f, e_k\rangle$ (intégrer par parties).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$ pour tout n.

Exercice 11 – Décomposition QR

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de colonnes a_1, a_2.

a) Orthonormaliser (a_1, a_2) par Gram-Schmidt : on obtient (q_1, q_2).

b) Exprimer a_1 et a_2 dans la base (q_1, q_2) et en déduire $A = QR$ avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à diagonale positive.

c) Vérifier le produit.

d) Utiliser la décomposition pour résoudre $AX = (3, 1)^{\mathsf{T}}$.

Exercice 12 – Compléter un vecteur unitaire en base orthonormée

Soit $e_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$.

a) Déterminer $e_1^{\perp}$ (équation).

b) Trouver une base orthonormée (e_2, e_3) de $e_1^{\perp}$ en partant du vecteur $(2, -1, 0)$.

c) Vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe, en calculant $e_1 \wedge e_2$.

Exercice 13 – Une matrice orthogonale symétrique

Soit $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que Q est orthogonale et symétrique. En déduire $Q^2 = I_3$.

b) Calculer $\det Q$.

c) Déterminer $\ker(Q - I_3)$ et $\ker(Q + I_3)$, et reconnaître l'application.

Exercice 14 – Gram-Schmidt sur R2[X] pour l'intégrale sur [0, 1]

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$.

a) Orthonormaliser $(1, X, X^2)$; on pourra réutiliser $e_1 = 1$ et $e_2 = \sqrt{3}(2X - 1)$.

b) Vérifier que e_3 est orthogonal à 1 et à X.

c) En déduire la meilleure approximation de X^2 par un polynôme de degré ≤ 1 pour la norme associée.

Exercice 15 – Synthèse : racines d'un polynôme orthogonal et quadrature de Gauss

Sur $\mathbb{R}_3[X]$, avec $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} PQ$, soit $L_2 = X^2 - \frac{1}{3}$ (orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$).

a) Montrer que L_2 a deux racines réelles $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ situées dans $]-1, 1[$.

b) On cherche α, β tels que $\int_{-1}^{1} P = \alpha P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \beta P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ pour $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Montrer que $\alpha = \beta = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que cette formule reste exacte pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ (écrire la division euclidienne $P = L_2 Q + R$).

d) Application : approcher $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ et comparer à la valeur exacte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).