Plaquette 1 – Produit scalaire, orthogonalité, Gram-Schmidt et projection orthogonale

Espaces préhilbertiens — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On vérifie qu'une forme est un **produit scalaire**, on applique **Cauchy-Schwarz**, on orthonormalise par **Gram-Schmidt**, et on calcule une **projection orthogonale** pour résoudre un problème de meilleure approximation.

Exercice 1 – Reconnaître un produit scalaire

Sur $\mathbb{R}^2$, la forme $\varphi((x,y),(x',y')) = xx' + 2yy'$ est-elle un produit scalaire ? Et $\psi((x,y),(x',y')) = xx' - yy'$?

Exercice 2 – Cauchy-Schwarz

Soient a, b, c des réels. Démontrer que $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Exercice 3 – Produit scalaire intégral

Sur $C([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, calculer $\langle f,g\rangle$, $\|f\|$ et $\|g\|$ pour $f(t)=1$ et $g(t)=t$.

Exercice 4 – Famille orthogonale

Montrer que $((1,1,1),(1,-1,0),(1,1,-2))$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, puis l'orthonormaliser.

Exercice 5 – Procédé de Gram-Schmidt

Orthonormaliser la base $(u_1,u_2) = ((1,1),(1,0))$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 – Projection orthogonale sur une droite

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer le projeté orthogonal de $u=(1,2,3)$ sur la droite $D = \mathrm{Vect}((1,1,1))$, puis la distance de u à D.

Exercice 7 – Projection sur un plan

Déterminer le projeté orthogonal de $u=(1,0,0)$ sur le plan P d'équation $x+y+z=0$.

Exercice 8 – Pythagore et parallélogramme

Soient x, y dans un espace préhilbertien avec $\|x\|=3$, $\|y\|=4$ et $\|x+y\|=5$.

a) Les vecteurs sont-ils orthogonaux ?

b) Calculer $\|x-y\|$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Meilleure approximation polynomiale

Dans $C([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg$, déterminer la constante a qui minimise $\int_0^1 (t-a)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 – Orthogonal d'un sous-espace

Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer $F^\perp$ pour $F = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(0,0,1,1))$.

Exercice 11 – Matrices et trace

Sur $M_2(\mathbb{R})$ muni de $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\left(A^{\mathsf{T}}B\right)$, calculer $\|A\|$ pour $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, et vérifier que les matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonales.

Exercice 12 – Une norme qui ne vient pas d'un produit scalaire

Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y) = \max(|x|,|y|)$.

a) Vérifier que N est une norme (on admettra l'inégalité triangulaire, facile).
b) Tester l'identité du parallélogramme avec $u=(1,0)$ et $v=(0,1)$.
c) En déduire qu'il n'existe aucun produit scalaire dont N soit la norme associée.
d) Même question pour $N_1(x,y) = |x|+|y|$.

Exercice 13 – Distance d'un point à un plan de R3

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, soit P le plan d'équation $x+2y-2z=0$ et $a=(3,1,1)$.

a) Donner un vecteur normal n à P et justifier que $P^\perp = \mathrm{Vect}(n)$.
b) Calculer le projeté orthogonal $p(a)$ de a sur P.
c) En déduire la distance $d(a,P)$ et vérifier la formule $d(a,P) = \dfrac{|\langle a,n\rangle|}{\|n\|}$.

Exercice 14 – Base orthonormée de R1[X] pour l'intégrale sur [0, 1]

Sur $\mathbb{R}_1[X]$, on pose $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer $\langle 1,1\rangle$, $\langle 1,X\rangle$, $\langle X,X\rangle$. La base $(1,X)$ est-elle orthogonale ?
b) Orthonormaliser $(1,X)$ par Gram-Schmidt.
c) Écrire $P = 3X+1$ dans la base obtenue et vérifier $\|P\|^2$ de deux façons.

Exercice 15 – Synthèse : moindres carrés

Dans $C([0\,;1],\mathbb{R})$ avec $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg$, déterminer le polynôme de degré ≤ 1 le plus proche de $f(t)=t^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).