Plaquette 2 – Produits scalaires et inégalités de Cauchy-Schwarz

Espaces préhilbertiens — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour **reconnaître** un produit scalaire, on vérifie dans l'ordre : symétrie, linéarité à gauche (la linéarité à droite suit), positivité $\langle x, x\rangle \geq 0$, puis le caractère **défini** ($\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$), qui est presque toujours le point délicat (un polynôme avec trop de racines, une fonction continue positive d'intégrale nulle). Pour **utiliser** l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on choisit l'espace, le produit scalaire et les deux vecteurs de sorte que le membre de gauche soit la quantité à majorer ; le cas d'égalité (vecteurs colinéaires) donne souvent l'optimum.

Exercice 1 – Deux formes bilinéaires sur R2

Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, on pose

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2, \qquad \psi(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$$

a) Montrer que φ et ψ sont bilinéaires et symétriques.

b) Montrer que φ est un produit scalaire (écrire $\varphi(x, x)$ comme somme de carrés).

c) Montrer que ψ n'en est pas un.

d) Calculer la norme de e_1 et de e_2 pour φ, et l'angle entre eux.

Exercice 2 – Produit scalaire par évaluations

Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

a) Montrer que c'est une forme bilinéaire symétrique positive.

b) Montrer que c'est un produit scalaire si $n = 2$.

c) Montrer que ce n'en est pas un si $n = 3$.

d) Pour $n = 2$, montrer que les polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2 associés à $0, 1, 2$ forment une base orthonormée.

Exercice 3 – Un produit scalaire faisant intervenir la dérivée

Sur $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$, on pose

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad [f, g] = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.

b) Montrer que $[\cdot,\cdot]$ n'en est pas un, mais que c'en est un sur $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

c) Pour $f \in F$, montrer que $|f(x)| \leq \sqrt{x}\sqrt{[f, f]}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 4 – Produit scalaire à poids

Sur $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,t\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que c'est un produit scalaire, bien que le poids t s'annule en 0.

b) Calculer $\|1\|$, $\|t\|$ et $\langle 1, t\rangle$, puis l'angle entre les fonctions 1 et t.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Trouver a tel que $t - a$ soit orthogonal à 1.

Exercice 5 – Cauchy-Schwarz pour les sommes

Soient $a_1, \dots, a_n$ réels.

a) Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k^2$, avec égalité si et seulement si les a_k sont égaux.

b) En déduire que la moyenne est inférieure à la moyenne quadratique.

c) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

d) Montrer que si $a_k > 0$, $\left(\sum a_k\right)\left(\sum \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$.

Exercice 6 – Cauchy-Schwarz pour les intégrales

Soit f continue et strictement positive sur $[a, b]$.

a) Montrer que $\left(\int_a^b f\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2$.

b) Montrer que $\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \geq (b-a)^2$. Étudier le cas d'égalité.

c) Vérifier b) pour $f(t) = \mathrm{e}^t$ sur $[0, 1]$.

d) Majorer $\int_0^1 \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de a).

Exercice 7 – Trace et produit scalaire de Frobenius

Sur $M_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}B)$.

a) Montrer que $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$ et en déduire que c'est un produit scalaire.

b) Montrer que $(\mathrm{tr}A)^2 \leq n\,\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}A)$.

c) Montrer que S_n et A_n sont orthogonaux.

d) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calculer $\|A\|$ et vérifier b).

Exercice 8 – Polarisation : retrouver le produit scalaire

Dans un espace préhilbertien, soient x, y tels que $\|x\| = 2$, $\|y\| = 3$ et $\|x + y\| = 4$.

a) Calculer $\langle x, y\rangle$.

b) En déduire $\|x - y\|$ et $\|2x - y\|$.

c) Calculer le cosinus de l'angle entre x et y.

d) Peut-on avoir $\|x\| = 2$, $\|y\| = 3$ et $\|x + y\| = 6$?

Exercice 9 – Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle du plan euclidien et M le milieu de $[BC]$.

a) En posant $u = \overrightarrow{MB}$ et $v = \overrightarrow{MA}$ (de sorte que $\overrightarrow{MC} = -u$), montrer que

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Reconnaître l'identité du parallélogramme.
c) Application : $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 8$. Calculer la longueur de la médiane AM.

Exercice 10 – Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire

Dans un espace préhilbertien, soient x, y non nuls.

a) Montrer que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$.
b) En déduire que l'égalité a lieu si et seulement si $y = \lambda x$ avec $\lambda > 0$.
c) Application : pour f, g continues sur $[0,1]$ et non nulles, quand a-t-on $\sqrt{\int (f+g)^2} = \sqrt{\int f^2} + \sqrt{\int g^2}$?
d) Montrer que cette propriété est fausse pour la norme $\max(|x_1|, |x_2|)$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 – Angle entre deux polynômes

Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer $\langle X^p, X^q\rangle$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.
b) Calculer l'angle entre 1 et X, puis entre X et X^2.
c) Montrer que $\cos(X^n, X^{n+1}) \to 1$ quand $n \to +\infty$. Interpréter.

Exercice 12 – Minimiser sous une contrainte linéaire

Déterminer le minimum de $x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + 2y + 3z = 14$, et le point où il est atteint.

a) En appliquant Cauchy-Schwarz à (x, y, z) et $(1, 2, 3)$.
b) Interpréter géométriquement.
c) Généraliser : minimum de $\|u\|^2$ sous la contrainte $\langle u, a\rangle = c$ ($a \neq 0$).

Exercice 13 – Encadrer une intégrale

a) Calculer $I = \int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.
b) Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz $I^2 \leq \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$.
c) Majorer $J = \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ par Cauchy-Schwarz, en choisissant bien les deux facteurs.

Exercice 14 – Norme sous-multiplicative sur les matrices

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\mathsf{T}A)} = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$.

a) Montrer, par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ appliqué à chaque coefficient de AB, que $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.
b) Calculer $\|I_n\|$. La norme est-elle égale à 1 en I_n ?
c) Vérifier a) sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A^\mathsf{T}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : produit scalaire défini par une matrice 2x2

Soit $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $\varphi(x, y) = x^{\mathsf{T}} S y$ pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ (vecteurs colonnes).

a) Montrer que φ est bilinéaire symétrique.

b) Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ (compléter le carré dans $\varphi(x, x)$).

c) Application : $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier les conditions, puis construire une base orthonormée pour φ par Gram-Schmidt à partir de (e_1, e_2).

d) Écrire la matrice de passage P de (e_1, e_2) à cette base et vérifier que $P^{\mathsf{T}} S P = I_2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).