Plaquette 4 – Projection orthogonale, distances et meilleure approximation

Espaces préhilbertiens — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Le projeté orthogonal $p_F(x)$ est **le point de F le plus proche de x** : c'est l'outil universel des problèmes de minimisation quadratique (distance d'un point à un plan, meilleure approximation d'une fonction par un polynôme, droite ou plan des moindres carrés). Pour le calculer : soit on dispose d'une **base orthonormée** de F et $p_F(x) = \sum \langle x, e_i\rangle e_i$; soit on écrit $p_F(x) = \sum \lambda_i f_i$ et l'on impose $x - p_F(x) \perp f_j$ pour tout j (**équations normales**) ; soit on projette sur $F^\perp$ quand il est plus petit (hyperplan : $p(x) = x - \frac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2} n$). La distance vient ensuite par Pythagore.

Exercice 1 – Matrice de projection sur une droite

Dans $\mathbb{R}^3$ canonique, soit $D = \mathrm{Vect}(u)$ avec $u = (1, 2, -1)$.

a) Écrire la matrice P de la projection orthogonale sur D.

b) Vérifier $P^2 = P$, $P^{\mathsf{T}} = P$ et $\mathrm{tr} P = 1$.

c) Calculer la distance de $x = (1, 1, 1)$ à la droite D.

Exercice 2 – Projection et réflexion par rapport à un plan

Dans $\mathbb{R}^3$ canonique, soit H le plan $x - y + 2z = 0$, de vecteur normal $n = (1, -1, 2)$.

a) Écrire la matrice P de la projection orthogonale sur H.

b) Écrire la matrice S de la réflexion par rapport à H et vérifier que S est orthogonale et symétrique.

c) Calculer $p(a)$, $s(a)$ et $d(a, H)$ pour $a = (1, 1, 1)$.

Exercice 3 – Réflexion de Householder

Soient $u = (3, 4, 0)$ et $v = (5, 0, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Vérifier que $\|u\| = \|v\|$.

b) On pose $n = u - v$. Montrer que la réflexion s par rapport à $n^\perp$ envoie u sur v.

c) Écrire la matrice de s.

d) Expliquer l'intérêt de ce procédé pour « faire apparaître des zéros » dans une colonne de matrice (décomposition QR).

Exercice 4 – Reconnaître un projecteur orthogonal

Soit p un projecteur d'un espace euclidien E ($p^2 = p$).

a) Montrer que p est un projecteur orthogonal ($\ker p \perp \mathrm{Im} p$) si et seulement si $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$ pour tous x, y.

b) En déduire que, dans une base orthonormée, la matrice d'un projecteur orthogonal est symétrique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles des projecteurs ? des projecteurs orthogonaux ?

d) Pour A, trouver x tel que $\|Ax\| > \|x\|$. Que dire pour un projecteur orthogonal ?

Exercice 5 – Projection sur l'image d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et F le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par ses colonnes.

a) Justifier que le projeté de x sur F s'écrit $A\lambda$ avec $A^{\mathsf{T}}A\lambda = A^{\mathsf{T}}x$ (équations normales).

b) En déduire la matrice de projection $P = A(A^{\mathsf{T}}A)^{-1}A^{\mathsf{T}}$.

c) Retrouver P par la formule $I_3 - \frac{nn^{\mathsf{T}}}{\|n\|^2}$ avec un vecteur normal n au plan.

Exercice 6 – Distance à un hyperplan de R4

Dans $\mathbb{R}^4$ canonique, soit $H = \{x \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

a) Déterminer $H^{\perp}$.

b) Calculer la distance de $a = (1, 2, 3, 4)$ à H et son projeté.

c) Montrer que pour tout x, $d(x, H) = \frac{|x_1 + x_2 + x_3 + x_4|}{2}$, et interpréter $p_H(x)$ en statistique.

Exercice 7 – Meilleure approximation affine de t² sur [0, 1]

Déterminer

$$m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t$$

et le couple (a, b) qui le réalise.

a) Interpréter m comme le carré d'une distance dans un espace préhilbertien.

b) Écrire les équations normales (orthogonalité de $t^2 - at - b$ à 1 et à t) et les résoudre.

c) Calculer m.

Exercice 8 – Approcher l'exponentielle par une droite sur [−1, 1]

Sur $C([-1, 1])$ avec $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} fg$, on cherche la meilleure approximation de $f(t) = \mathrm{e}^t$ par $a + bt$.

a) Justifier que 1 et t sont orthogonaux, et en déduire $a = \frac{\langle f, 1\rangle}{\|1\|^2}$, $b = \frac{\langle f, t\rangle}{\|t\|^2}$.

b) Calculer a et b.

c) Calculer l'erreur quadratique $\int_{-1}^{1} (\mathrm{e}^t - a - bt)^2 \,\mathrm{d}t$ (valeur approchée).

d) Comparer avec la tangente en 0, $1 + t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Plan des moindres carrés

On a mesuré une grandeur z en quatre points (x, y) : $(0,0) \mapsto 1$, $(1,0) \mapsto 2$, $(0,1) \mapsto 2$, $(1,1) \mapsto 4$. On cherche $z = a + bx + cy$ minimisant la somme des carrés des écarts.

a) Écrire le problème comme la projection de $Z = (1,2,2,4)$ sur l'image d'une matrice M de taille 4×3.

b) Écrire et résoudre les équations normales.

c) Calculer les résidus et la somme de leurs carrés.

Exercice 10 – Distance aux matrices de trace nulle

Dans $M_n(\mathbb{R})$ muni de $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}B)$, soit T l'hyperplan des matrices de trace nulle.

a) Montrer que $T = I_n^{\perp}$.

b) En déduire le projeté orthogonal de M sur T et $d(M, T)$.

c) Application : $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 – Distance de X³ aux polynômes de degré au plus 1

Sur $\mathbb{R}_3[X]$ muni de $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} PQ$, calculer $d(X^3, \mathbb{R}_1[X])$ et le polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ le plus proche de X^3.

Exercice 12 – Distance entre deux droites de l'espace

Soient D_1 passant par $A(0,0,0)$ de direction $u = (1,0,0)$, et D_2 passant par $B(0,1,1)$ de direction $v = (0,1,0)$.

a) Montrer que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

b) On cherche $M \in D_1$ et $N \in D_2$ tels que $\overrightarrow{MN}$ soit orthogonal à u et à v. Les déterminer.

c) En déduire la distance entre les deux droites et vérifier la formule $d = \dfrac{|\det(\overrightarrow{AB}, u, v)|}{\|u \wedge v\|}$.

Exercice 13 – Angle entre une droite et un plan

Soit P le plan $x + y + z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ et $u = (1,0,0)$.

a) Calculer le projeté $p(u)$ de u sur P.

b) L'angle $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ entre la droite $\operatorname{Vect}(u)$ et le plan est défini par $\cos\theta = \dfrac{\|p(u)\|}{\|u\|}$. Le calculer.

c) Montrer que $\sin\theta = \dfrac{|\langle u, n\rangle|}{\|u\|\|n\|}$ pour un vecteur normal n, et vérifier.

Exercice 14 – Un projecteur orthogonal diminue les normes

Soit E euclidien et p un projecteur ($p^2 = p$) non nul.

a) Montrer que si p est orthogonal, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x, avec égalité si et seulement si $x \in \operatorname{Im} p$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Réciproquement, on suppose $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x. Soient $y \in \mathrm{Im} p$, $z \in \ker p$ et $t \in \mathbb{R}$. En appliquant l'hypothèse à $y + tz$, montrer que $\langle y, z \rangle = 0$.

c) Conclure : un projecteur est orthogonal si et seulement s'il ne fait jamais croître la norme.

Exercice 15 – Synthèse : régression linéaire et coefficient de détermination

On reprend les points $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,5)$ et l'on note $Y = (1,2,4,5)$, $\mathbf{1} = (1,1,1,1)$, $X = (0,1,2,3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

a) Montrer que l'ajustement $\hat{Y} = aX + b\mathbf{1}$ des moindres carrés est le projeté orthogonal de Y sur $F = \mathrm{Vect}(X, \mathbf{1})$, et rappeler $\hat{Y}$ ($a = 1{,}4$, $b = 0{,}9$).

b) On note $\overline{Y} = 3 \cdot \mathbf{1}$ (la moyenne). Montrer que $Y - \hat{Y} \perp \hat{Y} - \overline{Y}$, puis la décomposition $\|Y - \overline{Y}\|^2 = \|\hat{Y} - \overline{Y}\|^2 + \|Y - \hat{Y}\|^2$.

c) Calculer $R^2 = \dfrac{\|\hat{Y} - \overline{Y}\|^2}{\|Y - \overline{Y}\|^2}$ et interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).