Plaquette 4 – Dimension finie : rang, sommes, supplémentaires

Espaces vectoriels — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dimension finie.

— Dans un espace de dimension n : une famille libre a au plus n vecteurs, une famille génératrice au moins n ; n **vecteurs libres (ou générateurs) forment une base**.

— $F \subset E \Rightarrow \dim F \leq \dim E$, et $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.

— **Rang** d'une famille : $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \dim \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

— **Système homogène** de p équations, n inconnues, de rang r : l'ensemble des solutions est de dimension $n - r \geq n - p$.

— **Grassmann** :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

— **Supplémentaires** : $E = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$. Tous les supplémentaires de F ont la dimension $\dim E - \dim F$.

— **Hyperplan** (sous-espace de dimension $n - 1$, noyau d'une forme linéaire non nulle) : si $a \notin H$, $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

— **Somme directe de p sous-espaces** : $F_1 + \ldots + F_p$ est directe $\Leftrightarrow \dim\left(\sum F_i\right) = \sum \dim F_i$ (les intersections deux à deux nulles **ne suffisent pas**).

Correction de l'exercice 1 – Dimensions de sous-espaces de matrices

On exhibe une base formée de matrices élémentaires E_{ij}, ou l'on compte les équations indépendantes.

a) $D_n = \mathrm{Vect}(E_{11}, \ldots, E_{nn})$, famille libre (sous-famille de la base canonique) : $\dim D_n = n$.

b) Base $(E_{ij})_{i \leq j}$: il y a n coefficients sur la diagonale, $n - 1$ sur la suivante, …, 1 dans le coin :

$$\dim T_n^+ = n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

c) T est le noyau de la forme linéaire **non nulle** tr : c'est un hyperplan, $\dim T = n^2 - 1$. Base : les E_{ij} $(i \neq j)$ et les $E_{ii} - E_{nn}$ $(i < n)$, soit $n^2 - n + n - 1$ matrices.

d) n équations $\sum_j m_{ij} = 0$, portant sur des coefficients **disjoints** (une par ligne), donc indépendantes : $\dim L = n^2 - n$. Autre vue : chaque ligne est un vecteur de l'hyperplan $x_1 + \ldots + x_n = 0$ de $\mathbb{R}^n$, de dimension $n - 1$, et les n lignes sont indépendantes : $n(n-1)$.

— Pour $n = 2$: D_2 de dimension 2, T_2^+ de dimension 3 (a, b, d libres), T de dimension 3 (a, b, c libres, $d = -a$), L de dimension 2 (les matrices $\begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix}$).

Réponse. n ; $\frac{n(n+1)}{2}$; $n^2 - 1$; $n^2 - n$.

Correction de l'exercice 2 – Hyperplan et droite supplémentaire

a) **Intersection** : si $x \in H \cap \mathrm{Vect}(a)$, $x = \lambda a$; si $\lambda \neq 0$, $a = \frac{1}{\lambda} x \in H$, exclu. Donc $x = 0$.

— **Dimensions** : $\dim H + \dim \mathrm{Vect}(a) = (n-1) + 1 = n$. Avec l'intersection nulle :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$$

b) H est le noyau de la forme linéaire $\varphi : P \mapsto P(1)$, non nulle ($\varphi(1) = 1$) : H est un hyperplan de dimension n dans $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension $n+1$). Le polynôme constant 1 n'est pas dans H : par a), $E = H \oplus \mathrm{Vect}(1)$.

c) On écrit $P = (P - P(1)) + P(1)$: le premier terme s'annule en 1, le second est constant. Ici $P(1) = 3$: $X^3 + 2X = (X^3 + 2X - 3) + 3$, et $X^3 + 2X - 3 = (X-1)(X^2 + X + 3)$ s'annule bien en 1.

d) $X \notin H$ car $1 \neq 0$: par a), $E = H \oplus \mathrm{Vect}(X)$. La décomposition est alors $P = (P - P(1)X) + P(1)X$: $X^3 + 2X = (X^3 - X) + 3X$. De même, tout polynôme Q avec $Q(1) \neq 0$ engendre un supplémentaire de H.

Réponse. $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$; $X^3 + 2X = (X^3 + 2X - 3) + 3 = (X^3 - X) + 3X$.

Correction de l'exercice 3 – Grassmann dans R5

a) Par Grassmann, et parce que $F + G \subset \mathbb{R}^5$:

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) \geq 3 + 4 - 5 = 2$$

b) De plus $F \cap G \subset F$, donc $\dim(F \cap G) \leq 3$. Les valeurs possibles sont 2 et 3. Avec $(e_1, \ldots, e_5)$ la base canonique :

— $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_4, e_5)$: $F \cap G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, dimension 2 (et $F + G = \mathbb{R}^5$) ;

— $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$: $F \subset G$, $F \cap G = F$, dimension 3.

c) $\dim(F \cap G) \geq 3 + 3 - 5 = 1$ et ≤ 3 : valeurs 1, 2, 3.

— $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $\mathrm{Vect}(e_3, e_4, e_5)$: intersection $\mathrm{Vect}(e_3)$, dimension 1 ;

— $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $\mathrm{Vect}(e_2, e_3, e_4)$: dimension 2 ;

— $F = G$: dimension 3.

— Deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$ ne peuvent jamais être en somme directe : leur somme serait de dimension $6 > 5$.

Réponse. a) ≥ 2 ; b) 2 ou 3 ; c) 1, 2 ou 3.

Correction de l'exercice 4 – Un supplémentaire dans les polynômes

a) $P(0) = P(1) = 0$ signifie que 0 et 1 sont racines, soit $X(X-1) \mid P$. Donc $P = X(X-1)Q$ avec $\deg Q \leq n - 2$. Réciproquement, un tel produit s'annule en 0 et 1.

— La famille $(X(X-1)X^k)_{0 \leq k \leq n-2}$ est échelonnée en degré : base de F, et $\dim F = n - 1$.

b) **Intersection** : un polynôme de degré ≤ 1 qui s'annule en 0 et en 1 a deux racines, il est nul. **Dimensions** : $(n-1) + 2 = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$. Donc

$$\mathbb{R}_n[X] = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$$

c) La composante dans $\mathbb{R}_1[X]$ est l'unique L de degré ≤ 1 tel que $P - L \in F$, c'est-à-dire $L(0) = P(0)$ et $L(1) = P(1)$: c'est l'**interpolation affine** de P en 0 et 1,

$$L = P(0) + (P(1) - P(0))X$$

d) $P(0) = 0$, $P(1) = 1$: $L = X$, et $X^3 - X = X(X-1)(X+1) \in F$. Donc $X^3 = X(X-1)(X+1) + X$.

Réponse. $\dim F = n - 1$; $\mathbb{R}_n[X] = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$; $L = P(0) + (P(1) - P(0))X$; $X^3 = X(X-1)(X+1) + X$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Trois droites du plan : piège de la somme directe

a) Deux vecteurs directeurs distincts parmi $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ ne sont jamais colinéaires : les droites sont distinctes, leur intersection est $\{0\}$.

b) Non : $(1,1) = (1,0) + (0,1) + 0$ avec $(1,0) \in D_1$, $(0,1) \in D_2$, $0 \in D_3$, et aussi $(1,1) = 0 + 0 + (1,1)$. La décomposition n'est pas unique. Les intersections deux à deux nulles **ne suffisent pas** dès trois sous-espaces.

c) La somme est **directe** si tout $x \in \sum F_i$ s'écrit de façon unique $x = \sum x_i$ avec $x_i \in F_i$; de façon équivalente, si $\sum x_i = 0$ entraîne $x_i = 0$ pour tout i.

— En réunissant des bases B_i des F_i, on obtient une famille génératrice de la somme, de cardinal $\sum \dim F_i$. Elle est **libre** si et seulement si la somme est directe (une relation entre ces vecteurs se regroupe en $\sum x_i = 0$ avec $x_i \in F_i$). Donc :

$$\text{somme directe} \Leftrightarrow \dim\left(\sum F_i\right) = \sum \dim F_i$$

— Ici $\dim(D_1 + D_2 + D_3) = 2 < 3$: pas directe.

d) Toute matrice se décompose en partie diagonale, partie strictement au-dessus et partie strictement en dessous ; les dimensions sont n, $\frac{n(n-1)}{2}$, $\frac{n(n-1)}{2}$, de somme n^2. Par c), la somme est directe et égale à $M_n(\mathbb{R})$.

Réponse. Intersections deux à deux nulles mais somme non directe ($\dim = 2 < 3$) ; critère : $\dim \sum F_i = \sum \dim F_i$.

Correction de l'exercice 6 – Rang d'une famille selon un paramètre

a) $u + v + w = (a+2)(1,1,1)$. On échelonne en retranchant u :

$$v - u = (0,\, a-1,\, 1-a) = (a-1)(0,1,-1), \qquad w - u = (a-1,\, 0,\, 1-a) = (a-1)(1,0,-1)$$

b) $\mathrm{Vect}(u,v,w) = \mathrm{Vect}(u, v-u, w-u)$.

— **Si** $a = 1$: $u = v = w = (1,1,1)$, rang 1.

— **Si** $a \neq 1$: $\mathrm{Vect}(u,v,w) = \mathrm{Vect}(u, (0,1,-1), (1,0,-1))$. On cherche si u est combinaison des deux autres : $\alpha(0,1,-1) + \beta(1,0,-1) = (\beta, \alpha, -\alpha-\beta) = (1,1,a)$ impose $\alpha = \beta = 1$ et $a = -2$.

— Donc : rang 2 si $a = -2$, rang 3 si $a \notin \{1,-2\}$.

c) $a \notin \{1,-2\}$: $\mathrm{Vect}(u,v,w) = \mathbb{R}^3$. $a = 1$: la droite $\mathrm{Vect}(1,1,1)$. $a = -2$: $u + v + w = 0$ et le plan engendré est $\mathrm{Vect}((0,1,-1),(1,0,-1))$, d'équation $x + y + z = 0$ (les trois vecteurs ont une somme de coordonnées $a + 2 = 0$).

Réponse. Rang 3 si $a \notin \{1,-2\}$; 1 si $a = 1$; 2 si $a = -2$ (plan $x + y + z = 0$).

Correction de l'exercice 7 – Racine double imposée

a) $P \mapsto P(1)$ et $P \mapsto P'(1)$ sont linéaires, F est l'intersection de leurs noyaux. Par la formule de Taylor en 1 :

$$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$$

— donc $P \in F$ si et seulement si P est combinaison des $(X-1)^k$ pour $k \geq 2$, c'est-à-dire $P = (X-1)^2 Q$ avec $\deg Q \leq n-2$.

b) Base $((X-1)^2, (X-1)^3, \ldots, (X-1)^n)$, échelonnée : $\dim F = n - 1$.

c) $H_1 = \ker(P \mapsto P(1))$ et $H_2 = \ker(P \mapsto P'(1))$ sont deux hyperplans de $\mathbb{R}_n[X]$ (dimension n).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Ils sont distincts : $X-1 \in H_1$ mais $(X-1)' = 1$, donc $X-1 \notin H_2$. Alors $H_1 + H_2$ contient strictement H_1, donc $H_1 + H_2 = \mathbb{R}_n[X]$, et par Grassmann $\dim(H_1 \cap H_2) = n + n - (n+1) = n-1$.

d) $\mathrm{Vect}(1, X-1) = \mathbb{R}_1[X]$ est un supplémentaire (intersection nulle, $2 + (n-1) = n+1$). La composante de X^n dans $\mathbb{R}_1[X]$ est sa **partie affine de Taylor** en 1 : $1 + n(X-1)$. Ainsi

— $X^n = (X^n - 1 - n(X-1)) + (1 + n(X-1))$, et le premier terme s'annule en 1 ainsi que sa dérivée ($n - n = 0$).

Réponse. $F = (X-1)^2\mathbb{R}_{n-2}[X]$, $\dim F = n-1$; supplémentaire $\mathbb{R}_1[X]$; $X^n = (X^n - nX + n - 1) + (nX - n + 1)$.

Correction de l'exercice 8 – Somme et intersection dans R4

a) $y = -x$ et $t = -z$: $(x, -x, z, -z) = x(1,-1,0,0) + z(0,0,1,-1)$. Base $(g_1, g_2) = ((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))$, $\dim G = 2$.

b) Un vecteur de F s'écrit $\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha+\beta, \beta, \alpha, 0)$. Il est dans G si et seulement si

$$(\alpha+\beta) + \beta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha + 0 = 0$$

— donc $\alpha = 0$ puis $\beta = 0$: $F \cap G = \{0\}$.

c) Grassmann : $\dim(F+G) = 2 + 2 - 0 = 4$, donc $F + G = \mathbb{R}^4$: F et G sont **supplémentaires**, il n'y a pas d'équation à chercher (la somme est tout l'espace).

— Contrôle : la famille (u_1, u_2, g_1, g_2) doit être une base de $\mathbb{R}^4$. Par exemple $e_4 = (0,0,0,1)$ s'écrit : $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma g_1 + \delta g_2 = (\alpha+\beta+\gamma, \beta-\gamma, \alpha+\delta, -\delta) = (0,0,0,1)$ donne $\delta = -1$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$, $1 + 2\beta = 0$: $\beta = \gamma = -\frac{1}{2}$. La décomposition existe bien.

Réponse. $\dim G = 2$; $F \cap G = \{0\}$; $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice 9 – Égalité par inclusion et dimension

a) Une base B de F est une famille libre de G de cardinal $\dim G$: c'est une base de G. Donc $G = \mathrm{Vect}(B) = F$.

b) Si $a(1+X) + b(1-X) + c(X^2+X) = 0$, le coefficient de X^2 donne $c = 0$, puis $a + b = 0$ et $a - b = 0$, donc $a = b = 0$. Trois vecteurs libres dans un espace de dimension 3 :

$$\mathrm{Vect}(1+X, 1-X, X^2+X) \subset \mathbb{R}_2[X] \quad \text{et} \quad \dim = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$$

— d'où l'égalité : c'est une base.

c) $(0,1,2) = (2,3,4) - 2(1,2,3)$ et $(1,1,1) = (2,3,4) - (1,2,3)$: le second espace est inclus dans le premier. Les deux familles sont libres (vecteurs non colinéaires), les deux espaces sont des plans : ils sont égaux.

d) $X\mathbb{R}[X]$ (polynômes sans terme constant) ne contient pas 1 : inclusion stricte. Pourtant, $P \mapsto XP$ est linéaire et bijective de $\mathbb{R}[X]$ sur $X\mathbb{R}[X]$. En dimension infinie, un sous-espace strict peut être « aussi gros » que l'espace : l'argument de dimension n'a plus de sens.

Réponse. $F \subset G$ et $\dim F = \dim G \Rightarrow F = G$; b) base ; c) égalité ; d) contre-exemple $X\mathbb{R}[X] \subsetneq \mathbb{R}[X]$.

Correction de l'exercice 10 – Solutions d'un système homogène : n moins le rang

a) $L_3 = L_1 + L_2$: la troisième équation est redondante. L_1 et L_2 ne sont pas proportionnelles : le rang est 2.

b) L'ensemble des solutions est de dimension

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\dim S = n - r = 5 - 2 = 3$$

— $L_1 + L_2$: $2(x_1 + x_3 + x_5) = 0$; $L_1 - L_2$: $2(x_2 + x_4) = 0$.
— Donc $x_1 = -x_3 - x_5$ et $x_2 = -x_4$, avec x_3, x_4, x_5 libres :
— $(x_3, x_4, x_5) = (1,0,0)$ donne $(-1,0,1,0,0)$; $(0,1,0)$ donne $(0,-1,0,1,0)$; $(0,0,1)$ donne $(-1,0,0,0,1)$.
— Ces trois vecteurs sont libres (regarder les coordonnées 3, 4, 5) : base de S.

c) Non : le rang est au plus 4, donc $\dim S \geq 7 - 4 = 3 > 0$. Un système homogène ayant plus d'inconnues que d'équations a toujours des solutions non nulles.

Réponse. Rang 2 ; $\dim S = 3$, base $((-1,0,1,0,0),(0,-1,0,1,0),(-1,0,0,0,1))$; c) non, $\dim S \geq 3$.

Correction de l'exercice 11 – Intersection de conditions sur un polynôme

a) $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ équivaut à $X(X-1)(X-2) \mid P$, soit $P = X(X-1)(X-2)(aX+b)$. Base $(X(X-1)(X-2), X^2(X-1)(X-2))$, $\dim F = 2$ (trois conditions indépendantes sur un espace de dimension 5).

b) G est le noyau de la forme linéaire $P \mapsto \int_0^2 P$, non nulle (elle vaut 2 en $P = 1$) : hyperplan, $\dim G = 4$.

c) Soit $w = X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X$. Par symétrie autour de 1 ($w(2-t) = -w(t)$), $\int_0^2 w = 0$. Calculons aussi $\int_0^2 t w(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\int_0^2 (t^4 - 3t^3 + 2t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{32}{5} - 12 + \frac{16}{3} = \frac{96 - 180 + 80}{15} = -\frac{4}{15}$$

— Pour $P = (aX+b)w$: $\int_0^2 P = a\left(-\frac{4}{15}\right) + b \times 0$, nul si et seulement si $a = 0$.
— $F \cap G = \mathrm{Vect}(w)$, de dimension 1.
— Grassmann : $\dim(F+G) = 2 + 4 - 1 = 5 = \dim \mathbb{R}_4[X]$, cohérent avec $F \not\subset G$ ($Xw \in F \setminus G$), qui force $F + G$ à contenir strictement l'hyperplan G.

Réponse. $F = \mathrm{Vect}(w, Xw)$ avec $w = X(X-1)(X-2)$; G hyperplan ; $F \cap G = \mathrm{Vect}(w)$.

Correction de l'exercice 12 – Tous les supplémentaires ont la même dimension

a) On complète une base $(f_1, \ldots, f_p)$ de F en une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E (base incomplète) : $G = \mathrm{Vect}(f_{p+1}, \ldots, f_n)$ est un supplémentaire. Si G' est un supplémentaire quelconque, Grassmann donne

$$n = \dim(F + G') = p + \dim G' - 0, \quad \text{donc} \quad \dim G' = n - p$$

b) $\dim D + \dim P_c = 3$; il reste à étudier l'intersection. $(t,t,t) \in P_c \Leftrightarrow t(2+c) = 0$. Si $c \neq -2$, seul $t = 0$ convient, et $D \oplus P_c = \mathbb{R}^3$. Si $c = -2$, $D \subset P_{-2}$ et la somme n'est pas directe.

c) On cherche $(3,0,0) = (t,t,t) + (x,y,z)$ avec $x + y = 0$: $x = 3 - t$, $y = -t$, $z = -t$, et $x + y = 3 - 2t = 0$ donne $t = \frac{3}{2}$.

— $(3,0,0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, et le second vecteur vérifie bien $x + y = 0$.

d) Oui : $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = n$ donnent $\dim(F+G) = n$, donc $F + G = E$. C'est le critère pratique des supplémentaires en dimension finie.

Réponse. dim d'un supplémentaire $= n - p$; P_c supplémentaire de D ssi $c \neq -2$; $(3,0,0) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Complexes vus comme espace réel : dimension

a) Sur $\mathbb{C}$: base $(1, X, \dots, X^n)$, dimension $n+1$. Sur $\mathbb{R}$: base $(1, i, X, iX, \dots, X^n, iX^n)$, dimension $2(n+1)$.

b) F est le noyau de la forme $\mathbb{C}$-linéaire non nulle $P \mapsto P(i)$: hyperplan de $\mathbb{C}_2[X]$, donc

$$\dim_{\mathbb{C}} F = 2, \qquad \dim_{\mathbb{R}} F = 2 \times 2 = 4$$

— Base complexe : $(X - i,\ X(X-i))$.

c) $X \in G$ mais $iX \notin G$: pas un $\mathbb{C}$-sous-espace. En revanche, une combinaison **réelle** de polynômes réels est réelle : $G = \mathbb{R}_2[X]$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace de dimension réelle 3.

d) Un polynôme **réel** P tel que $P(i) = 0$ vérifie aussi $P(-i) = \overline{P(i)} = 0$, donc $X^2 + 1 \mid P$; en degré ≤ 2 : $P = a(X^2+1)$ avec a réel.

— $F \cap G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X^2+1)$, dimension réelle 1. Contrôle par Grassmann (sur $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}_2[X]$ de dimension 6) : $\dim_{\mathbb{R}}(F+G) = 4 + 3 - 1 = 6$, donc $F + G = \mathbb{C}_2[X]$.

Réponse. $\dim_{\mathbb{C}} = n+1$, $\dim_{\mathbb{R}} = 2n+2$; $\dim_{\mathbb{R}} F = 4$; $G = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}$-sous-espace de dim 3 ; $F \cap G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X^2+1)$.

Correction de l'exercice 14 – Rang et ajout de vecteurs

a) $\mathrm{Vect}(u_i) \subset \mathrm{Vect}(u_i, v) = \mathrm{Vect}(u_i) + \mathrm{Vect}(v)$, d'où par Grassmann

$$r \leq \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p, v) \leq r + 1$$

— Il y a égalité à gauche si et seulement si les deux espaces sont égaux, c'est-à-dire $v \in \mathrm{Vect}(u_i)$.

b) $\sin^2 = 1 - \cos^2$ et $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$: $\sin^2$ et $\cos(2\,\cdot)$ sont dans $\mathrm{Vect}(1, \cos^2)$. La famille $(1, \cos^2)$ est libre ($\cos^2$ n'est pas constante). Rang 2.

c) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$: ce vecteur est dans $\mathrm{Vect}(\cos, \cos^3)$. Reste $(1, \cos, \cos^2, \cos^3)$: si $a + b\cos x + c\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$ pour tout x, le polynôme $a + bt + ct^2 + dt^3$ s'annule pour tout $t = \cos x \in [-1, 1]$, donc en une infinité de points : il est nul. Cette famille est libre, le rang vaut 4.

Réponse. b) rang 2 ; c) rang 4 ($\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : l'espace des carrés magiques 3x3

a) $M \in K$ s'écrit : il existe s tel que 8 sommes linéaires valent s. Autrement dit, K est l'ensemble des M telles que (M, s) vérifie un système **linéaire homogène** en 10 inconnues ; si $M, N \in K$, chaque somme de $\lambda M + N$ vaut $\lambda s(M) + s(N)$: $\lambda M + N \in K$ et $s(\lambda M + N) = \lambda s(M) + s(N)$.

b) La ligne du milieu, la colonne du milieu et les deux diagonales passent toutes par le centre m_{22}, et recouvrent chacun des 8 autres coefficients exactement une fois. Leur somme vaut donc

$$4s = (\text{somme de tous les coefficients}) + 3m_{22} = 3s + 3m_{22}$$

— (la somme de tous les coefficients est celle des trois lignes, $3s$), d'où $m_{22} = \frac{s}{3}$.

c) J : toutes les sommes valent 3. A : lignes $0, 0, 0$; colonnes $0, 0, 0$; diagonales $1 + 0 - 1 = 0$ et $0 + 0 + 0 = 0$. B : lignes et colonnes nulles ; diagonales $0 + 0 + 0 = 0$ et $-1 + 0 + 1 = 0$.

— Liberté : si $\alpha J + \beta A + \gamma B = 0$, le coefficient central donne $\alpha = 0$; les coefficients $(1,1)$ et $(1,2)$ donnent $\beta = 0$ et $-\beta + \gamma = 0$, donc $\gamma = 0$.

— Comme $\dim K = 3$, (J, A, B) est une base.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $s(L) = 15$ donc le coefficient sur J est $\alpha = \frac{15}{3} = 5$ (centre 5). Puis $(1,1)$: $5 + \beta = 2$, $\beta = -3$; $(1,2)$: $5 - \beta + \gamma = 7$, $\gamma = -1$.

— $L = 5J - 3A - B$. Contrôle ligne 2 : $(5+3+1,\ 5,\ 5-3-1) = (9,5,1)$; ligne 3 : $(5-1,\ 5-3+1,\ 5+3) = (4,3,8)$.

Réponse. $m_{22} = \frac{s}{3}$; (J, A, B) base de K ; Lo Shu $= 5J - 3A - B$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).