Plaquette 5 – Espaces vectoriels en action : suites, signaux, codes et courbes

Espaces vectoriels — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Espaces de solutions.

— **Suites** $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ($b \neq 0$) : espace de dimension 2 (une suite est déterminée par (u_0, u_1)). Équation caractéristique $r^2 = ar + b$:

$$\text{racines } r_1 \neq r_2 : u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \qquad \text{racine double } r : u_n = (\lambda + \mu n) r^n$$

— **Équation différentielle linéaire** : solutions de l'équation complète = une solution particulière + solutions de l'équation homogène (espace de dimension égale à l'ordre).

— **Interpolation** : $P \in \mathrm{K}_n[X]$ est déterminé par ses valeurs en $n+1$ points distincts (base de Lagrange).

— **Espaces sur un corps fini** : un sous-espace de dimension k de F_2^n a exactement 2^k éléments.

— **Extension de corps** : $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un $\mathbb{Q}$-espace de dimension 2.

— **Dimension infinie** : E est de dimension infinie s'il contient des familles libres de cardinal arbitrairement grand.

Correction de l'exercice 1 – Interpolation : l'unicité donne l'existence

a) Si P et Q conviennent, $P - Q \in \mathbb{R}_n[X]$ s'annule en $n+1$ points distincts ; un polynôme non nul de degré $\leq n$ a au plus n racines, donc $P = Q$.

b) Les conditions s'écrivent

$$\sum_{k=0}^{n} c_k a_i^k = y_i \qquad (0 \leq i \leq n)$$

— système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues. Le système homogène associé ($y_i = 0$) n'a que la solution nulle d'après a) (appliqué avec $Q = 0$) : le système carré est de **Cramer**, donc il a une solution pour **tout** second membre. Unicité et existence vont ensemble pour un système carré.

c) $P = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + c_3 X^3$ avec $c_0 = 1$:

— $P(1) = 1 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$ et $P(-1) = 1 - c_1 + c_2 - c_3 = 2$: en sommant, $2 + 2c_2 = 2$, donc $c_2 = 0$, et $c_1 + c_3 = -1$;

— $P(2) = 1 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 7$, soit $c_1 + 4c_3 = 3$; donc $3c_3 = 4$, $c_3 = \frac{4}{3}$ et $c_1 = -\frac{7}{3}$.

— $P = \frac{4}{3}X^3 - \frac{7}{3}X + 1$. Contrôle : $P(2) = \frac{32}{3} - \frac{14}{3} + 1 = 6 + 1 = 7$; $P(-1) = -\frac{4}{3} + \frac{7}{3} + 1 = 2$.

Réponse. Unicité par les racines, existence par le système de Cramer ; $P = \frac{4}{3}X^3 - \frac{7}{3}X + 1$.

Correction de l'exercice 2 – Fibonacci et la formule de Binet

a) φ est linéaire. Elle est injective : une suite de R est déterminée par ses deux premiers termes (récurrence). Elle est surjective : pour tout (a, b), la relation permet de construire u avec $u_0 = a$, $u_1 = b$. Une base de $\mathbb{R}^2$ se transporte en une base de R : $\dim R = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $(r^n) \in R$ avec $r \neq 0$ équivaut à $r^2 = r + 1$:

$$r = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad r = \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

— (φ^n) et (ψ^n) ne sont pas colinéaires ($\varphi \neq \psi$) : famille libre de 2 vecteurs dans un espace de dimension 2, donc base.

c) $F_n = \lambda\varphi^n + \mu\psi^n$ avec $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda\varphi + \mu\psi = 1$, soit $\lambda(\varphi - \psi) = 1$; comme $\varphi - \psi = \sqrt{5}$:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

— Contrôle : $F_2 = \dfrac{\varphi^2 - \psi^2}{\sqrt{5}} = \dfrac{(\varphi+1) - (\psi+1)}{\sqrt{5}} = 1$.

d) $\lambda + \mu = 2$ et $\lambda\varphi + \mu\psi = 1$; comme $\varphi + \psi = 1$, $\lambda = \mu = 1$ convient : $L_n = \varphi^n + \psi^n$.
Contrôle : $L_2 = \varphi^2 + \psi^2 = (\varphi + \psi) + 2 = 3 = L_1 + L_0$.

Réponse. $\dim R = 2$, base (φ^n, ψ^n) ; $F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$; $L_n = \varphi^n + \psi^n$.

Correction de l’exercice 3 – Racine double : la base (r^n, n r^n)

a) $r^2 = 4r - 4 \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0$: une seule racine, $r = 2$. Les suites géométriques de R sont les multiples de (2^n) : elles forment une droite, alors que $\dim R = 2$. Il manque un vecteur.

b) Calculons $v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n$:

$$(n+2)2^{n+2} - 4(n+1)2^{n+1} + 4n2^n = 2^n(4(n+2) - 8(n+1) + 4n) = 2^n \times 0 = 0$$

c) (2^n) et $(n2^n)$ sont dans R et non colinéaires (leurs termes d’indice 0 valent 1 et 0, d’indice 1 valent 2 et 2) : base de R.

— $u_n = (\lambda + \mu n)2^n$ avec $u_0 = \lambda = 1$ et $u_1 = 2(\lambda + \mu) = 4$, donc $\mu = 1$: $u_n = (n+1)2^n$.

d) Formule : $u_5 = 6 \times 32 = 192$. Récurrence : $u_2 = 16 - 4 = 12$, $u_3 = 48 - 16 = 32$, $u_4 = 128 - 48 = 80$, $u_5 = 320 - 128 = 192$.

Réponse. Base $(2^n, n2^n)$; $u_n = (n+1)2^n$; $u_5 = 192$.

Correction de l’exercice 4 – Oscillations et courant triphasé

a) $\cos(\omega t)'' = -\omega^2 \cos(\omega t)$: c’est une solution, de même pour sin. Liberté : si $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = 0$ pour tout t, $t = 0$ donne $a = 0$ et $t = \frac{\pi}{2\omega}$ donne $b = 0$. Deux vecteurs libres dans un espace de dimension 2 : base.

b) $\cos(\omega t + \varphi) = \cos\varphi\cos(\omega t) - \sin\varphi\sin(\omega t)$: coordonnées $(\cos\varphi, -\sin\varphi)$ dans la base de a).

c) Toute solution s’écrit $y = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ avec $(a,b) \neq (0,0)$. On pose $A = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ et l’on choisit φ tel que $\cos\varphi = \frac{a}{A}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{A}$ (le point $\left(\frac{a}{A}, \frac{b}{A}\right)$ est sur le cercle unité). Alors

$$y = A(\cos\varphi\cos(\omega t) + \sin\varphi\sin(\omega t)) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

d) Les trois tensions sont dans S, de dimension 2 : elles sont liées. Pour la relation, on passe en complexes : $v_0 + v_1 + v_2 = V\mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}(1 + j^{-1} + j^{-2})\right)$ avec $j = e^{2i\pi/3}$, et $1 + \bar{j} + \bar{j}^2 = \overline{1 + j + j^2} = 0$. Donc $v_0 + v_1 + v_2 = 0$: c’est pourquoi le fil de neutre d’un réseau triphasé équilibré ne transporte aucun courant.

Réponse. Base $(\cos\omega t, \sin\omega t)$; $\cos(\omega t + \varphi)$ a pour coordonnées $(\cos\varphi, -\sin\varphi)$; $v_0 + v_1 + v_2 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Le code de Hamming (7, 4)

a) C est l'ensemble des solutions d'un système **homogène** sur le corps F_2 : c'est un sous-espace. Les variables x_1, x_2, x_4 n'apparaissent chacune que dans une équation : le système est déjà échelonné, de rang 3, et

$$\dim C = 7 - 3 = 4, \qquad \mathrm{card} C = 2^4 = 16$$

b) Dans F_2, $-1 = 1$: $x_1 = x_3 + x_5 + x_7$, $x_2 = x_3 + x_6 + x_7$, $x_4 = x_5 + x_6 + x_7$.

— Message $(1, 0, 1, 1)$: $x_1 = 1 + 0 + 1 = 0$, $x_2 = 1 + 1 + 1 = 1$, $x_4 = 0 + 1 + 1 = 0$.

— Mot émis : $(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$.

c) Pour $y = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$:

— $s_1 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 = 0 + 1 + 1 + 1 = 1$;

— $s_2 = y_2 + y_3 + y_6 + y_7 = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$;

— $s_3 = y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 0 + 1 + 1 + 1 = 1$.

— Syndrome $s_3 s_2 s_1 = 101$ en binaire, soit 5.

— Explication : si $y = x + e_k$ avec $x \in C$, les sommes de y sont celles de e_k, par linéarité. Or la j-ième équation contient x_k exactement quand le j-ième bit de l'écriture binaire de k vaut 1 (équation 1 : positions $1, 3, 5, 7$; équation 2 : $2, 3, 6, 7$; équation 3 : $4, 5, 6, 7$). Le syndrome est donc l'écriture binaire de k.

— Correction : on change le bit 5, et l'on retrouve $(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$, le mot émis.

Réponse. $\dim C = 4$, 16 mots ; mot émis $(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$; syndrome $101 = 5$: erreur sur le bit 5.

Correction de l'exercice 6 – Le corps Q(racine de 2)

a) $K = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2})$, donc c'est un $\mathbb{Q}$-sous-espace de $\mathbb{R}$. La famille $(1, \sqrt{2})$ est libre sur $\mathbb{Q}$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) : base, dimension 2.

b) $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$, avec $ac + 2bd$ et $ad + bc$ rationnels.

c) Pour $x = a + b\sqrt{2} \neq 0$, on pose $\overline{x} = a - b\sqrt{2}$. Alors

$$x\overline{x} = a^2 - 2b^2$$

— et $a^2 - 2b^2 \neq 0$: sinon, si $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ contredirait l'irrationalité de $\sqrt{2}$, et si $b = 0$, $a = 0$ et $x = 0$. Donc $x^{-1} = \dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} \in K$.

— $(1 + \sqrt{2})^{-1} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \sqrt{2} - 1$; $(3 + 2\sqrt{2})^{-1} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{9 - 8} = 3 - 2\sqrt{2}$.

— K est ainsi un **corps**, de dimension 2 sur $\mathbb{Q}$.

d) Si $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$, alors $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ serait liée sur $\mathbb{Q}$; or elle est libre (on l'a montré en élevant au carré). Donc $\sqrt{3} \notin K$.

Réponse. $\dim_{\mathbb{Q}} K = 2$; K est un corps ; $(1 + \sqrt{2})^{-1} = \sqrt{2} - 1$, $(3 + 2\sqrt{2})^{-1} = 3 - 2\sqrt{2}$; $\sqrt{3} \notin K$.

Correction de l'exercice 7 – Reconnaître la dimension infinie

a) Si $\dim E = d$, toute famille libre a au plus d éléments ; une famille libre à $d + 1$ éléments contredit cela.

b) Des familles libres arbitrairement grandes :

— $\mathbb{R}[X]$: $(1, X, \ldots, X^n)$, échelonnée en degré ;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $(e_0, \dots, e_n)$, où e_k vaut 1 au rang k et 0 ailleurs (si $\sum \lambda_k e_k = 0$, le terme de rang k vaut λ_k) ;
— $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \dots, \mathrm{e}^{nx})$, libre (exponentielles de fréquences distinctes).

c) Une suite u nulle à partir du rang $N+1$ s'écrit

$$u = \sum_{k=0}^{N} u_k e_k$$

— et les coefficients sont forcément les termes u_k (évaluer au rang k) : décomposition unique. La famille infinie (e_k) est libre (toute sous-famille finie l'est) et génératrice de F.

d) Non : la suite constante 1 n'est combinaison **finie** d'aucun nombre de e_k (une telle combinaison est nulle à partir d'un rang). (e_k) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mais pas génératrice.

Réponse. Familles libres arbitrairement grandes ⇒ dimension infinie ; (e_k) base de F, mais pas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Correction de l'exercice 8 – Fonctions chapeaux et interpolation affine par morceaux

a) Une combinaison de fonctions continues, affines sur chaque morceau, est continue et affine sur chaque morceau ; la fonction nulle est dans A. Sur $[i, i+1]$, une fonction affine est déterminée par ses valeurs aux extrémités : $f(i)$, $f(i+1)$ déterminent f sur chaque morceau.

b) Pour $f \in A$, $g = \sum_i f(i)\varphi_i$ est dans A et prend en chaque entier j la valeur $\sum_i f(i)\delta_{ij} = f(j)$. Par a), $g = f$: la famille est **génératrice**. Elle est **libre** : si $\sum \lambda_i \varphi_i = 0$, l'évaluation en j donne $\lambda_j = 0$. Donc base, et $\dim A = 4$:

$$f = f(0)\varphi_0 + f(1)\varphi_1 + f(2)\varphi_2 + f(3)\varphi_3$$

c) Les quatre fonctions 1, x, $|x-1|$, $|x-2|$ sont continues et affines sur chaque morceau : elles sont dans A. Elles sont libres (non-dérivabilité en 1 et 2, puis $a + bx = 0$) : quatre vecteurs libres dans un espace de dimension 4, c'est une base.

d) φ_1 a une pente $+1$ sur $[0,1]$, -1 sur $[1,2]$, 0 sur $[2,3]$. Un terme $c|x-k|$ fait sauter la pente de $2c$ en k : sauts -2 en 1 et $+1$ en 2, donc $c_1 = -1$ et $c_2 = \frac{1}{2}$. Sur $[2,3]$, $-|x-1| + \frac{1}{2}|x-2| = -(x-1) + \frac{1}{2}(x-2) = -\frac{x}{2}$; il faut obtenir 0, d'où $a + bx = \frac{x}{2}$.

— $\varphi_1(x) = \frac{x}{2} - |x-1| + \frac{1}{2}|x-2|$. Contrôle : en 0, $0 - 1 + 1 = 0$; en 1, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; en 2, $1 - 1 + 0 = 0$; en 3, $\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{2} = 0$.

Réponse. $\dim A = 4$, $f = \sum f(i)\varphi_i$; $\varphi_1 = \frac{x}{2} - |x-1| + \frac{1}{2}|x-2|$.

Correction de l'exercice 9 – Suites périodiques de période 3

a) La relation $u_{n+3} = u_n$ est linéaire homogène : sous-espace. Une suite de P_3 est déterminée par (u_0, u_1, u_2), qui sont quelconques ; les trois suites de P_3 commençant par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ forment une base : $\dim P_3 = 3$.

b) $j^3 = 1$, donc $j^{n+3} = j^n$ et $j^{2(n+3)} = j^{2n}$: ces suites sont 3-périodiques. Liberté : si $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$, les rangs 0, 1, 2 donnent

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + j\beta + j^2\gamma = 0 \\ \alpha + j^2\beta + j^4\gamma = 0 \end{cases}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— En sommant, et avec $1+j+j^2=0$ et $j^4=j$: $3\alpha=0$. De même, $L_1+j^2L_2+jL_3$ donne $3\beta=0$ (car $j^3=1$) et $L_1+jL_2+j^2L_3$ donne $3\gamma=0$. Base.

c) On cherche $\delta=\alpha a+\beta b+\gamma c$: rang 0 : $\alpha+\beta+\gamma=1$; rangs 1 et 2 : 0. Les mêmes combinaisons qu'en b) donnent $3\alpha=1$, $3\beta=1$, $3\gamma=1$:

— $\delta_n=\frac{1}{3}\left(1+j^n+j^{2n}\right)$. Contrôle : $\delta_1=\frac{1}{3}(1+j+j^2)=0$.

d) $j^{2n}=\overline{j^n}$, donc $j^n+j^{2n}=2\,\mathrm{Re}(j^n)=2\cos\frac{2n\pi}{3}$, et

— $\delta_n=\frac{1}{3}\left(1+2\cos\frac{2n\pi}{3}\right)$: vaut 1 si $3\mid n$ et $\frac{1}{3}(1-1)=0$ sinon. Ce « filtre » sert à extraire une somme sur les indices multiples de 3.

Réponse. $\dim P_3=3$, base $(1,j^n,j^{2n})$; $\delta_n=\frac{1}{3}(1+j^n+j^{2n})=\frac{1}{3}\left(1+2\cos\frac{2n\pi}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 10 – Compresser un signal : la base de Haar

a) Les produits scalaires $h_k\cdot h_l$ sont nuls pour $k\neq l$ (vérification directe : $h_0\cdot h_1=1+1-1-1=0$, $h_0\cdot h_2=0$, $h_1\cdot h_3=-1+1=0$, etc.). Si $\sum\lambda_k h_k=0$, le produit scalaire avec h_l donne $\lambda_l\|h_l\|^2=0$, donc $\lambda_l=0$: libre, 4 vecteurs, base.

b) Par la même méthode, le coefficient de h_l est

$$\lambda_l=\frac{x\cdot h_l}{h_l\cdot h_l}$$

— $\lambda_0=\frac{9+7+3+5}{4}=6$: c'est la **moyenne** du signal ;

— $\lambda_1=\frac{9+7-3-5}{4}=2$ (écart entre moitiés) ; $\lambda_2=\frac{9-7}{2}=1$; $\lambda_3=\frac{3-5}{2}=-1$.

— Contrôle : $6h_0+2h_1+h_2-h_3=(6+2+1,\,6+2-1,\,6-2-1,\,6-2+1)=(9,7,3,5)$.

c) On garde $6h_0+2h_1=(8,8,4,4)$: chaque moitié est remplacée par sa moyenne. L'erreur est $h_2-h_3=(1,-1,-1,1)$, soit un écart d'une unité sur chaque échantillon. On a stocké 2 nombres au lieu de 4.

d) La base est **orthogonale** : chaque coordonnée s'obtient par un simple produit scalaire, sans résoudre de système. C'est le principe des bases d'ondelettes utilisées en compression d'images (JPEG 2000).

Réponse. $x=6h_0+2h_1+h_2-h_3$; compression : $(8,8,4,4)$, erreur $(1,-1,-1,1)$.

Correction de l'exercice 11 – Polynômes de Bernstein et courbes de Bézier

a) B_k est divisible par X^k et son terme en X^k a pour coefficient $\binom{3}{k}\neq 0$. Dans une relation $\sum\lambda_k B_k=0$, le terme constant ne vient que de B_0, donc $\lambda_0=0$; puis le terme en X ne vient que de B_1, donc $\lambda_1=0$, etc. Famille libre de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}_3[X]$: base.

b) Par la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}X^k(1-X)^{3-k}=(X+(1-X))^3=1$$

— Et $\frac{k}{3}\binom{3}{k}=\binom{2}{k-1}$ pour $k\geq 1$, donc
$\sum_k\frac{k}{3}B_k=X\sum_{k=1}^{3}\binom{2}{k-1}X^{k-1}(1-X)^{3-k}=X(X+1-X)^2=X$.

c) $B_k\left(\frac{1}{2}\right)=\binom{3}{k}\frac{1}{8}$: poids $\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}$.

— Abscisse : $\frac{0+3+9+4}{8}=2$; ordonnée : $\frac{0+6+6+0}{8}=\frac{3}{2}$. Point $\left(2,\frac{3}{2}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) En $t=0$, $B_0=1$ et les autres sont nuls : on obtient P_0 ; en $t=1$, P_3. Si $P_k = A + \frac{k}{3}(B-A)$, par b) :

— $\sum B_k(t)P_k = \left(\sum B_k(t)\right)A + \left(\sum \frac{k}{3}B_k(t)\right)(B-A) = A + t(B-A)$: le segment, parcouru à vitesse constante. Les deux identités de b) expriment la « précision linéaire » des courbes de Bézier.

Réponse. Base (valuations échelonnées) ; $\sum B_k = 1$, $\sum \frac{k}{3}B_k = X$; point $\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 12 – Faisceau de plans contenant une droite

a) L'équation est affine en (x,y,z), de partie linéaire $(\lambda+\mu)x + (\lambda-\mu)y + \lambda z$. Ces coefficients ne sont pas tous nuls : sinon $\lambda=0$ puis $\mu=0$. C'est donc un plan, et tout point de D annule les deux parenthèses, donc l'équation.

b) On impose le passage par A :

$$\lambda(1+0+1-1) + \mu(1-0) = \lambda + \mu = 0$$

— Avec $\lambda=1$, $\mu=-1$: $(x+y+z-1)-(x-y)=0$, soit $2y+z-1=0$.

— Contrôle : A donne $0+1-1=0$; un point de D s'écrit $(t,t,1-2t)$ et donne $2t+1-2t-1=0$.

c) Un plan est parallèle à (Oz) si son équation ne contient pas z (le vecteur $(0,0,1)$ est dans sa direction) : $\lambda=0$. Le plan cherché est $x-y=0$.

d) Les équations des plans contenant D sont les combinaisons $\lambda E_1 + \mu E_2$ des deux équations $E_1 = x+y+z-1$ et $E_2 = x-y$: elles forment un **plan vectoriel** (dimension 2) de l'espace des fonctions affines. Deux équations proportionnelles définissant le même plan, la famille des plans contenant D dépend en fait d'un seul paramètre $\lambda{:}\mu$ (« faisceau de plans »).

Réponse. b) $2y+z-1=0$; c) $x-y=0$; les équations forment un espace de dimension 2.

Correction de l'exercice 13 – Polynômes de Tchebychev

a) $T_2 = 2X\cdot X - 1 = 2X^2-1$ et $T_3 = 2X(2X^2-1) - X = 4X^3 - 3X$. Avec $X=\cos\theta$: $2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$ et $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta$.

b) Par récurrence, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} ($n \geq 1$) : $2XT_n$ est de degré $n+1$, et T_{n-1} de degré $n-1$. Famille échelonnée en degré : base de $\mathbb{R}_3[X]$.

c) On inverse les formules de a) :

$$X^2 = \frac{T_0+T_2}{2}, \qquad X^3 = \frac{3T_1+T_3}{4}$$

— Avec $X=\cos\theta$: ce sont les formules de **linéarisation** $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ et $\cos^3\theta = \frac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4}$.

d) $P = 4\cdot\frac{3T_1+T_3}{4} + 2\cdot\frac{T_0+T_2}{2} - 3T_1 + T_0 = T_3 + T_2 + 2T_0$.

— Contrôle : $4X^3 - 3X + 2X^2 - 1 + 2 = 4X^3 + 2X^2 - 3X + 1$.

Réponse. $T_2 = 2X^2-1$, $T_3 = 4X^3-3X$; $X^2 = \frac{T_0+T_2}{2}$, $X^3 = \frac{3T_1+T_3}{4}$; $P = T_3 + T_2 + 2T_0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Équation avec second membre : un espace affine

a) (H) est linéaire homogène : S_H est un sous-espace de $C^1(\mathbb{R})$. Si $y \in S_H$, posons $z(x) = \mathrm{e}^x y(x)$: $z' = \mathrm{e}^x(y' + y) = 0$, donc z est constante égale à C et $y = C\mathrm{e}^{-x}$. Réciproquement, $C\mathrm{e}^{-x}$ est solution. Donc $S_H = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}^{-x})$, droite vectorielle.

b) Non : la fonction nulle n'est pas solution ($0 \neq x$). De plus, si $y_1, y_2 \in S_E$, $(y_1 + y_2)' + (y_1 + y_2) = 2x$: pas stable par somme.

c) Avec $y_0 = ax + b$: $a + ax + b = x$, donc $a = 1$ et $b = -1$: $y_0 = x - 1$. Pour toute y :

$$y \in S_E \Leftrightarrow (y - y_0)' + (y - y_0) = x - x = 0 \Leftrightarrow y - y_0 \in S_H$$

— $S_E = \{x - 1 + C\mathrm{e}^{-x} \mid C \in \mathbb{R}\} = y_0 + S_H$: c'est un **espace affine**, translaté de la droite S_H (même structure que les solutions d'un système linéaire avec second membre).

d) $y(0) = -1 + C = 3$, donc $C = 4$: $y = x - 1 + 4\mathrm{e}^{-x}$. Contrôle : $y' + y = 1 - 4\mathrm{e}^{-x} + x - 1 + 4\mathrm{e}^{-x} = x$.

Réponse. $S_H = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}^{-x})$; $S_E = x - 1 + \mathrm{Vect}(\mathrm{e}^{-x})$ (espace affine) ; $y = x - 1 + 4\mathrm{e}^{-x}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : géométrie de l'espace (Z/2Z)^3

a) E a $2^3 = 8$ éléments. Un sous-espace de dimension k, muni d'une base $(v_1, \ldots, v_k)$, a pour éléments les $\sum \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \in \{0, 1\}$, tous distincts par unicité des coordonnées :

$$\mathrm{card} F = 2^{\dim F}$$

b) Une droite vectorielle a $2^1 = 2$ éléments : $\{0, v\}$ avec $v \neq 0$. Réciproquement, tout $v \neq 0$ engendre la droite $\{0, v\}$ (les seuls scalaires sont 0 et 1). Bijection $v \mapsto \{0, v\}$: il y a $8 - 1 = 7$ droites.

c) Chaque $(a, b, c) \neq 0$ donne un hyperplan, c'est-à-dire un plan (dimension $3 - 1 = 2$). Deux équations non nulles définissent le même plan si et seulement si elles sont proportionnelles, c'est-à-dire égales (le seul scalaire non nul est 1). Il y a donc 7 plans. Un plan a $2^2 = 4$ éléments, dont 3 non nuls : il contient 3 droites.

d) La droite $\{0, v\}$ est dans le plan d'équation (a, b, c) si et seulement si $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$: c'est une équation non nulle en (a, b, c), dont les solutions forment un plan de F_2^3, soit 3 triplets non nuls. Donc chaque droite est dans 3 plans.

— Deux plans distincts P, P' : $P + P'$ contient strictement P, donc $P + P' = E$, et par Grassmann $\dim(P \cap P') = 2 + 2 - 3 = 1$.
— Double comptage : 7 plans × 3 droites = 21 = 7 droites × 3 plans. Exemple : le plan $x + y + z = 0$ contient les droites engendrées par $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$.

Réponse. 8 éléments ; $\mathrm{card} F = 2^{\dim F}$; 7 droites, 7 plans ; 3 droites par plan, 3 plans par droite ; deux plans se coupent selon une droite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).