Plaquette 3 – Familles libres, génératrices et bases

Espaces vectoriels — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Familles de vecteurs.

- **Libre** : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$. **Liée** sinon : l'un des vecteurs est combinaison des autres.
- Une famille contenant 0, ou deux vecteurs égaux, est liée ; une sous-famille d'une famille libre est libre.
- **Génératrice** de E : tout vecteur de E est combinaison linéaire de la famille.
- **Base** : libre et génératrice $\Leftrightarrow$ tout $x \in E$ s'écrit **de façon unique** $x = \sum x_i e_i$; les x_i sont les **coordonnées**.
- **Polynômes échelonnés** : si $\deg P_k = k$ pour $0 \leq k \leq n$, $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathrm{K}_n[X]$.
- **Taylor** : $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ pour $\deg P \leq n$.
- **Lagrange** : pour $a_0, \ldots, a_n$ distincts, $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ vérifie $L_i(a_j) = \delta_{ij}$, et

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i \qquad (\deg P \leq n)$$

- **Outils pour des fonctions** : évaluer, dériver, faire tendre x vers l'infini (terme dominant), intégrer contre une fonction bien choisie.

Correction de l'exercice 1 – Liberté selon un paramètre

a) On résout $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$, coordonnée par coordonnée :

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

- Des trois dernières : $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\lambda_3 = \lambda_1$, $\lambda_4 = -\lambda_1$.
- La première devient $(1-a)\lambda_1 = 0$.
- Si $a \neq 1$: $\lambda_1 = 0$, donc tous les λ_i sont nuls, la famille est **libre** (c'est alors une base de $\mathbb{R}^4$).
- Si $a = 1$: λ_1 est quelconque, la famille est **liée**.

b) Pour $a = 1$, avec $\lambda_1 = 1$: $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0$. Contrôle : $(1-0+0-1,\ 1-1+0-0,\ 0-1+1-0,\ 0-0+1-1) = 0$. La famille (u_1, u_2, u_3) est libre (même calcul sans u_4), donc le rang vaut 3.

c) On résout $\sum \lambda_i u_i = (1,0,0,0)$ avec $a = 0$: $\lambda_1 = 1$, puis $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -1$ (la quatrième équation $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ est vérifiée).

- $e_1 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4$; coordonnées $(1, -1, 1, -1)$.

Réponse. Libre si et seulement si $a \neq 1$; pour $a = 1$: $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0$, rang 3 ; c) $(1, -1, 1, -1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Extraire une base d'une famille génératrice

a) Cinq vecteurs dans un espace de dimension 3 : une famille libre y a au plus 3 vecteurs. Elle est donc liée.

b) Relations visibles : $u_2 = 2u_1$ et $u_4 = u_1 + u_3$. On garde u_1, u_3, u_5 et l'on teste leur liberté :

$$\alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1) = (\alpha,\, \beta,\, \alpha+\beta+\gamma) = 0$$

— donc $\alpha = \beta = 0$, puis $\gamma = 0$: famille libre.

— Elle engendre le même espace que la famille entière (u_2 et u_4 en sont des combinaisons) : c'est une base de $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_5)$, qui est de dimension 3, donc égal à $\mathbb{R}^3$.

c) Algorithme : on garde u_k si et seulement si $u_k \notin \mathrm{Vect}$(vecteurs déjà gardés).

— La famille gardée reste **libre** à chaque étape (ajouter un vecteur hors du Vect d'une famille libre préserve la liberté).

— Chaque vecteur rejeté est combinaison des vecteurs gardés : la famille gardée engendre tout. Libre et génératrice, c'est une base. Ici : u_1 gardé, u_2 rejeté, u_3 gardé, u_4 rejeté, u_5 gardé.

Réponse. Base extraite (u_1, u_3, u_5) ; le sous-espace engendré est $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 3 – Compléter une base d'un hyperplan

a) **Appartenance** : chaque v_i a une somme de coordonnées nulle. **Liberté** : $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (\alpha,\, \beta-\alpha,\, \gamma-\beta,\, -\gamma) = 0$ donne $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$.

— **Génératrice** : si $x + y + z + t = 0$, on cherche (α, β, γ) avec $\alpha = x$, $\beta - \alpha = y$, $\gamma - \beta = z$:

$$\alpha = x, \quad \beta = x + y, \quad \gamma = x + y + z$$

— et la dernière coordonnée $-\gamma = -(x+y+z) = t$ est exacte grâce à l'équation de H. Donc (v_1, v_2, v_3) est une base et $\dim H = 3$.

b) D'après la base incomplète, il suffit d'ajouter un vecteur **hors de** H : $e_1 = (1,0,0,0)$ convient ($1 \neq 0$). En effet, si $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta e_1 = 0$, la somme des coordonnées donne $\delta = 0$, puis $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille (v_1, v_2, v_3, e_1) est libre de cardinal 4 : base de $\mathbb{R}^4$.

c) $1 + 2 + 3 - 6 = 0$: $w \in H$. Par les formules de a) : $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 6$.

— Contrôle : $v_1 + 3v_2 + 6v_3 = (1,\, -1+3,\, -3+6,\, -6) = (1,2,3,-6)$.

Réponse. b) (v_1, v_2, v_3, e_1) ; c) $w = v_1 + 3v_2 + 6v_3$, coordonnées $(1,3,6)$.

Correction de l'exercice 4 – Transformer une famille libre

On écrit une relation nulle, on regroupe selon u, v, w, et l'on utilise la **liberté** de (u,v,w) pour annuler chaque coefficient.

a) $\alpha(u+v) + \beta(v+w) + \gamma(w+u) = (\alpha+\gamma)u + (\alpha+\beta)v + (\beta+\gamma)w = 0$ donne

$$\alpha + \gamma = 0, \qquad \alpha + \beta = 0, \qquad \beta + \gamma = 0$$

— En sommant : $2(\alpha+\beta+\gamma) = 0$, donc $\alpha+\beta+\gamma = 0$, puis $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha = 0$. **Libre**.

b) $(u-v) + (v-w) + (w-u) = 0$: relation non triviale, famille **liée**.

c) $\alpha(u + av) + \beta(v + aw) + \gamma(w + au) = (\alpha + a\gamma)u + (a\alpha + \beta)v + (a\beta + \gamma)w = 0$:

— $\beta = -a\alpha$, $\gamma = -a\beta = a^2\alpha$, et $\alpha + a\gamma = (1 + a^3)\alpha = 0$.

— Si $a^3 \neq -1$, c'est-à-dire $a \neq -1$ (sur $\mathbb{R}$), alors $\alpha = 0$ et tout est nul : **libre**.

— Si $a = -1$: liée, et l'on retrouve b). Le cas a) correspond à $a = 1$: $1 + 1 = 2 \neq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) libre ; b) liée (somme nulle) ; c) libre si et seulement si $a \neq -1$.

Correction de l'exercice 5 – Translatées du sinus

a) Par la formule d'addition :

$$f_a(x) = \sin x \cos a + \cos x \sin a, \quad \text{soit} \quad f_a = \cos a \cdot \sin + \sin a \cdot \cos$$

— **Liberté** de $(\sin, \cos)$: si $\lambda \sin x + \mu \cos x = 0$ pour tout x, l'évaluation en $x = 0$ donne $\mu = 0$, et en $x = \frac{\pi}{2}$ donne $\lambda = 0$.

b) Les trois fonctions sont dans le plan $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$, de dimension 2 : trois vecteurs d'un espace de dimension 2 sont liés. Le rang vaut 2, car $f_0 = \sin$ et $f_1 = \cos 1 \cdot \sin + \sin 1 \cdot \cos$ ne sont pas colinéaires ($\sin 1 \neq 0$).

c) On cherche α, β, γ en annulant les coefficients de sin et cos :

— coefficient de cos : $\beta \sin 1 + \gamma \sin 2 = 0$; on prend $\beta = \sin 2 = 2 \sin 1 \cos 1$ et $\gamma = -\sin 1$;
— coefficient de sin : $\alpha + \beta \cos 1 + \gamma \cos 2 = 0$, donc $\alpha = \sin 1 \cos 2 - 2 \sin 1 \cos^2 1 = \sin 1 (\cos 2 - 2 \cos^2 1) = -\sin 1$.
— En divisant par $\sin 1$: $-f_0 + 2 \cos 1 \, f_1 - f_2 = 0$, soit

$$\sin(x+2) + \sin x = 2 \cos 1 \sin(x+1)$$

— c'est la formule $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$.

Réponse. Rang 2 ; $\sin(x+2) + \sin x = 2 \cos 1 \sin(x+1)$.

Correction de l'exercice 6 – Fonctions valeur absolue translatées

a) Supposons $\sum_k \lambda_k g_k = 0$. Fixons j. Les g_k pour $k \neq j$ sont dérivables en j, donc $\lambda_j g_j = -\sum_{k \neq j} \lambda_k g_k$ est dérivable en j.

— Or g_j n'est pas dérivable en j (dérivées à gauche -1 et à droite $+1$). Si $\lambda_j \neq 0$, $g_j = \frac{1}{\lambda_j}(\lambda_j g_j)$ serait dérivable en j : contradiction. Donc $\lambda_j = 0$, pour tout j.

b) Si $a + bx + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 = 0$, le même argument en 1 puis en 2 donne $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, puis $a + bx = 0$ pour tout x, donc $a = b = 0$ (évaluer en 0 et en 1). **Libre**.

c) On cherche $h = a + bx + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$. Aux points anguleux, la pente saute de $2\lambda_k$; ici elle saute de $+1$ en 1 et de -1 en 2, d'où

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

— Pour $x \geq 2$: $\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-2) = \frac{1}{2}$, et il faut $h = 1$; pour $x \leq 1$: $\frac{1}{2}(1-x) - \frac{1}{2}(2-x) = -\frac{1}{2}$, et il faut $h = 0$. Dans les deux cas la partie en $|\cdot|$ est constante, donc $b = 0$ et $a = \frac{1}{2}$.
— $h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2}|x-2|$. Contrôle en $x = 1{,}5$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, milieu de la rampe.

Réponse. Famille libre (non-dérivabilité en k) ; $h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2}|x-2|$.

Correction de l'exercice 7 – Exponentielles de fréquences distinctes

a) Supposons $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{a_k x} = 0$ pour tout x. En divisant par $e^{a_n x} > 0$:

$$\lambda_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e^{(a_k - a_n)x} = 0$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Pour $k < n$, $a_k - a_n < 0$, donc $\mathrm{e}^{(a_k - a_n)x} \to 0$ quand $x \to +\infty$. Par passage à la limite : $\lambda_n = 0$.
— On recommence avec $n-1$ termes : $\lambda_{n-1} = 0$, etc. Tous les λ_k sont nuls.

b) Pour $n = 1$: $\lambda_1 \mathrm{e}^{a_1 x} = 0$ impose $\lambda_1 = 0$. Supposons le résultat vrai pour $n-1$ exponentielles et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{e}^{a_k x} = 0$. On dérive et l'on retranche a_n fois la relation :

— $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (a_k - a_n) \mathrm{e}^{a_k x} = 0$;
— par hypothèse de récurrence, $\lambda_k(a_k - a_n) = 0$, et $a_k \neq a_n$, donc $\lambda_k = 0$ pour $k < n$; il reste $\lambda_n \mathrm{e}^{a_n x} = 0$, donc $\lambda_n = 0$.

c) Pour tout n, $(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \dots, \mathrm{e}^{nx})$ est libre. Si $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ était de dimension finie d, toute famille libre aurait au plus d éléments : absurde avec $n = d + 1$.

Réponse. Libre : le terme de plus grande fréquence domine en $+\infty$; ou récurrence par dérivation ; $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Correction de l'exercice 8 – Puissances réelles

a) Même principe que pour les exponentielles : le terme de plus grand exposant **domine** en $+\infty$. Si $\sum \lambda_k x^{\alpha_k} = 0$ sur $]0, +\infty[$, on divise par x^{α_n} :

$$\lambda_n + \sum_{k<n} \lambda_k x^{\alpha_k - \alpha_n} = 0, \qquad x^{\alpha_k - \alpha_n} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

— donc $\lambda_n = 0$, et l'on conclut de proche en proche.

b) Si $ax + bx\ln x + cx\ln^2 x = 0$ pour tout $x > 0$, on divise par x : $a + b\ln x + c\ln^2 x = 0$. Avec $t = \ln x$, qui parcourt $\mathbb{R}$: le polynôme $a + bt + ct^2$ a une infinité de racines, il est nul : $a = b = c = 0$. **Libre**.

c) Le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$ ($t \in \mathbb{R}$) transforme x^{α_k} en $\mathrm{e}^{\alpha_k t}$: une relation $\sum \lambda_k x^{\alpha_k} = 0$ sur $]0, +\infty[$ équivaut à $\sum \lambda_k \mathrm{e}^{\alpha_k t} = 0$ sur $\mathbb{R}$, et la liberté des exponentielles de fréquences distinctes donne $\lambda_k = 0$.

Réponse. Libre (terme dominant en $+\infty$, ou $x = \mathrm{e}^t$) ; b) libre (polynôme en $\ln x$ à infinité de racines).

Correction de l'exercice 9 – Sinus de fréquences entières : intégrer

a) Par la formule $\sin p \sin q = \frac{1}{2}(\cos(p-q) - \cos(p+q))$:

$$I_{jk} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((j-k)x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((j+k)x)\,\mathrm{d}x$$

— Pour $m \in \mathbb{Z}^*$, $\int_0^{2\pi} \cos(mx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(mx)}{m}\right]_0^{2\pi} = 0$, et pour $m = 0$ l'intégrale vaut 2π.
— Comme $j + k \geq 2$, le second terme est nul. Donc $I_{jk} = 0$ si $j \neq k$ et $I_{kk} = \pi$.

b) Si $\sum_k \lambda_k s_k = 0$, on multiplie par s_j et l'on intègre sur $[0, 2\pi]$: $\sum_k \lambda_k I_{kj} = \pi\lambda_j = 0$. Donc $\lambda_j = 0$ pour tout j.

c) Le même calcul donne $\int_0^{2\pi} f(x)\sin(jx)\,\mathrm{d}x = \pi b_j$, soit $b_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(jx)\,\mathrm{d}x$ (coefficients de Fourier).

d) Linéarisation : $\sin^3 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{3ix} - 3\mathrm{e}^{ix} + 3\mathrm{e}^{-ix} - \mathrm{e}^{-3ix}}{-8i}$, d'où $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Par intégrale : $b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \times \frac{3\pi}{4} = \frac{3}{4}$ (moyenne de $\sin^4$ égale à $\frac{3}{8}$, d'après $\sin^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$).

— $b_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3 x \sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)\sin 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$. Les deux méthodes concordent.

Réponse. $I_{jk} = \pi\delta_{jk}$; famille libre ; $b_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(jx)\,\mathrm{d}x$; $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

Correction de l'exercice 10 – Un polynôme et ses dérivées

a) Si $P = a_n X^n + \dots$ avec $a_n \neq 0$, alors $P^{(k)}$ est de degré exactement $n-k$ (coefficient dominant $a_n \frac{n!}{(n-k)!} \neq 0$). La famille est donc formée de $n+1$ polynômes de degrés $n, n-1, \dots, 0$, **tous distincts** :

$$\text{degrés échelonnés} \Longrightarrow \text{famille libre}$$

— (Dans une relation $\sum \lambda_k P^{(k)} = 0$, le seul terme de degré n est $\lambda_0 P$, donc $\lambda_0 = 0$; puis $\lambda_1 = 0$, etc.) Libre, de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$: c'est une base.

b) $P' = 3X^2$, $P'' = 6X$, $P''' = 6$. Donc $1 = \frac{1}{6}P'''$, $X = \frac{1}{6}P''$, $X^2 = \frac{1}{3}P'$.

c) $Q = aP + \frac{b}{3}P' + \frac{c}{6}P'' + \frac{d}{6}P'''$: coordonnées $\left(a, \frac{b}{3}, \frac{c}{6}, \frac{d}{6}\right)$. Contrôle : $aX^3 + \frac{b}{3} \times 3X^2 + \frac{c}{6} \times 6X + \frac{d}{6} \times 6 = Q$.

Réponse. Degrés $n, n-1, \dots, 0$: base ; $1 = \frac{1}{6}P'''$, $X = \frac{1}{6}P''$, $X^2 = \frac{1}{3}P'$; coordonnées $\left(a, \frac{b}{3}, \frac{c}{6}, \frac{d}{6}\right)$.

Correction de l'exercice 11 – Coordonnées dans une base de Taylor

a) Les $(X-a)^k$ ont des degrés échelonnés $0, 1, \dots, n$: famille libre de $n+1$ éléments dans un espace de dimension $n+1$, donc base.

b) **Formule de Taylor** pour les polynômes :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

c) $P(1) = 1 - 2 + 5 = 4$; $P' = 3X^2 - 2$, $P'(1) = 1$; $P'' = 6X$, $P''(1) = 6$; $P''' = 6$.

— $P = 4 + (X-1) + \frac{6}{2}(X-1)^2 + \frac{6}{6}(X-1)^3 = 4 + (X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3$.

— Contrôle en $X = 0$: $4 - 1 + 3 - 1 = 5 = P(0)$.

d) Les deux premières coordonnées sont $P(1) = 4$ et $P'(1) = 1$. Et

$$P = (3 + (X-1))(X-1)^2 + (4 + (X-1))$$

— avec $\deg(X+3) \leq 1 < 2$: le reste de la division par $(X-1)^2$ est $4 + (X-1) = X + 3$, le quotient $X + 2$. Les coordonnées de Taylor donnent directement ce reste.

Réponse. $X^3 - 2X + 5 = 4 + (X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3$; reste par $(X-1)^2$: $X + 3$.

Correction de l'exercice 12 – Base de Lagrange

a) Par définition $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$:

$$L_0 = \frac{X(X-2)}{(-1)(-3)} = \frac{X(X-2)}{3}, \quad L_1 = \frac{(X+1)(X-2)}{(1)(-2)}, \quad L_2 = \frac{(X+1)X}{3 \times 2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— L_i s'annule en les deux autres points par construction, et vaut 1 en a_i : par exemple $L_0(-1) = \frac{(-1)(-3)}{3} = 1$, $L_1(0) = \frac{1\times(-2)}{-2} = 1$, $L_2(2) = \frac{3\times 2}{6} = 1$.

b) Si $\sum \lambda_i L_i = 0$, l'évaluation en a_j donne $\lambda_j = 0$: libre. Trois vecteurs libres dans $\mathbb{R}_2[X]$ (dimension 3) : base. Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $Q = P - \sum P(a_i)L_i$ est de degré ≤ 2 et s'annule en trois points : $Q = 0$, d'où $P = \sum P(a_i)L_i$.

c) 1 prend la valeur 1 en chaque a_i : $L_0 + L_1 + L_2 = 1$. X prend les valeurs $-1, 0, 2$: $X = -L_0 + 0\cdot L_1 + 2L_2$, donc $-L_0 + 2L_2 = X$.

d) $P = 4L_0 + L_1 + 7L_2 = \frac{4}{3}(X^2 - 2X) - \frac{1}{2}(X^2 - X - 2) + \frac{7}{6}(X^2 + X)$.

— Coefficient de X^2 : $\frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{7}{6} = \frac{8-3+7}{6} = 2$; de X : $-\frac{8}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6} = \frac{-16+3+7}{6} = -1$; constante : 1.

— $P = 2X^2 - X + 1$. Contrôle : $P(-1) = 2 + 1 + 1 = 4$, $P(0) = 1$, $P(2) = 8 - 2 + 1 = 7$.

Réponse. $L_0 = \frac{X(X-2)}{3}$, $L_1 = -\frac{(X+1)(X-2)}{2}$, $L_2 = \frac{X(X+1)}{6}$; $\sum L_i = 1$; $P = 2X^2 - X + 1$.

Correction de l'exercice 13 – C2 sur R et sur C

a) Sur $\mathbb{C}$: $(z_1, z_2) = z_1(1,0) + z_2(0,1)$, de façon unique : base $((1,0),(0,1))$, dimension 2.

— Sur $\mathbb{R}$: en écrivant $z_k = a_k + ib_k$, $(z_1, z_2) = a_1(1,0) + b_1(i,0) + a_2(0,1) + b_2(0,i)$ avec des coefficients **réels** uniques : base $((1,0),(i,0),(0,1),(0,i))$, dimension 4.

b) Sur $\mathbb{C}$: $y = (i, -1) = i(1, i) = ix$, donc $ix - y = 0$: **liée**.

— Sur $\mathbb{R}$: si a, b sont réels et $ax + by = 0$, alors $(a + ib,\ ai - b) = (0,0)$. La première coordonnée donne $a + ib = 0$ avec a, b réels, donc $a = b = 0$: **libre**. La multiplication par i n'est pas autorisée sur $\mathbb{R}$.

c) **Génératrice** : $x = \sum z_k e_k$ avec $z_k = a_k + ib_k$ donne $x = \sum (a_k e_k + b_k(ie_k))$, combinaison réelle.

— **Libre** : si $\sum (a_k e_k + b_k i e_k) = 0$ avec a_k, b_k réels, alors $\sum (a_k + ib_k)e_k = 0$, donc $a_k + ib_k = 0$ par liberté sur $\mathbb{C}$, puis $a_k = b_k = 0$.

$$\dim_{\mathbb{R}} E = 2\dim_{\mathbb{C}} E$$

Réponse. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$; (x, y) liée sur $\mathbb{C}$ ($y = ix$), libre sur $\mathbb{R}$; $\dim_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}}$.

Correction de l'exercice 14 – Liberté sur Q : racines et logarithmes

a) Si $a + b\sqrt{2} = 0$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ et $b \neq 0$, alors $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$: absurde. Donc $b = 0$, puis $a = 0$. Sur $\mathbb{R}$, la relation $\sqrt{2}\cdot 1 + (-1)\cdot\sqrt{2} = 0$ est non triviale (coefficients réels autorisés).

b) Supposons $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ avec a, b, c rationnels. Alors $a + b\sqrt{2} = -c\sqrt{3}$; en élevant au carré :

$$a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3c^2$$

— Si $ab \neq 0$, $\sqrt{2} = \frac{3c^2 - a^2 - 2b^2}{2ab} \in \mathbb{Q}$: absurde. Donc $a = 0$ ou $b = 0$.

— Si $b = 0$: $a = -c\sqrt{3}$, et l'irrationalité de $\sqrt{3}$ impose $c = 0$, puis $a = 0$.

— Si $a = 0$: $b\sqrt{2} = -c\sqrt{3}$, d'où $2b^2 = 3c^2$. Si $c \neq 0$, $\left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{3}{2}$ et $\sqrt{3/2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ serait rationnel, donc $\sqrt{6}$ aussi : absurde. Donc $c = 0$ et $b = 0$.

c) Si $p\ln 2 + q\ln 3 = 0$ avec p, q rationnels, on multiplie par un dénominateur commun pour avoir $p, q \in \mathbb{Z}$. Alors $\ln(2^p 3^q) = 0$, soit $2^p = 3^{-q}$. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, $p = q = 0$.

d) $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$: liée. (Plus généralement, les $\ln p$ pour p premier forment une famille

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

libre infinie sur $\mathbb{Q}$, ce qui prouve que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace de dimension infinie.)

Réponse. $(1, \sqrt{2})$ et $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ libres sur $\mathbb{Q}$; $(\ln 2, \ln 3)$ libre (factorisation) ; $(\ln 2, \ln 3, \ln 6)$ liée.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : base binomiale et sommes de puissances

a) $\deg H_k = k$: famille échelonnée en degré de $n+1$ polynômes dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc base.

b) $H_{k+1}(X+1) - H_{k+1}(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{(k+1)!}((X+1)-(X-k)) = \dfrac{X\cdots(X-k+1)}{k!} = H_k$.

— En sommant pour m de 0 à N, la somme **télescope** :

$$\sum_{m=0}^{N} H_k(m) = \sum_{m=0}^{N} (H_{k+1}(m+1) - H_{k+1}(m)) = H_{k+1}(N+1) - H_{k+1}(0) = H_{k+1}(N+1)$$

c) On cherche $X^2 = \alpha H_2 + \beta H_1 + \gamma H_0$. En évaluant en 0, 1, 2 : $\gamma = 0$, $\beta = 1$, puis $4 = \alpha + 2$, donc $\alpha = 2$: $X^2 = 2H_2 + H_1$.

— De même $X^3 = aH_3 + bH_2 + cH_1 + d$: en 0, $d = 0$; en 1, $c = 1$; en 2, $8 = b + 2$, $b = 6$; en 3, $27 = a + 18 + 3$, $a = 6$. Donc $X^3 = 6H_3 + 6H_2 + H_1$.

— Contrôle : $X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X = X^3 - 3X^2 + 2X + 3X^2 - 3X + X = X^3$.

d) Par linéarité et b) :

— $\sum_{m=1}^{N} m^2 = 2\binom{N+1}{3} + \binom{N+1}{2} = \dfrac{(N+1)N(N-1)}{3} + \dfrac{(N+1)N}{2} = \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$;

— $\sum_{m=1}^{N} m^3 = 6\binom{N+1}{4} + 6\binom{N+1}{3} + \binom{N+1}{2} = \left(\dfrac{N(N+1)}{2}\right)^2$. Contrôle pour $N = 2$: $0 + 6 + 3 = 9 = 1 + 8$; pour $N = 3$: $6 + 24 + 6 = 36 = 1 + 8 + 27$.

Réponse. $X^2 = 2H_2 + H_1$, $X^3 = 6H_3 + 6H_2 + H_1$; $\sum m^2 = \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$, $\sum m^3 = \left(\dfrac{N(N+1)}{2}\right)^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).