Plaquette 1 – Sous-espaces, familles libres, bases et dimension

Espaces vectoriels — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sous-espaces vectoriels.

— $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si $0_E \in F$ et si

$$\forall (x, y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathrm{K},\quad \lambda x + y \in F$$

— Une **intersection** de sous-espaces en est un ; une **réunion** en général **non**.

— $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ est le plus petit sous-espace contenant ces vecteurs : l'ensemble de leurs combinaisons linéaires.

Familles.

— **Libre** : $\sum \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow$ tous les λ_i sont nuls.

— **Génératrice** de E : $\mathrm{Vect}(x_i) = E$.

— **Base** : famille libre **et** génératrice. Tout vecteur s'y décompose de **façon unique**.

Dimension.

— Toutes les bases d'un espace de dimension finie ont le **même cardinal**, noté $\dim E$.

— Dans un espace de dimension n : toute famille libre a au plus n vecteurs, toute famille génératrice au moins n ; une famille de n **vecteurs libre (ou génératrice)** est une **base**.

— **Théorème de la base incomplète** : toute famille libre se complète en une base.

— Si $F \subset E$ avec $\dim E$ finie : $\dim F \leq \dim E$, avec égalité **si et seulement si** $F = E$.

Sommes.

— $F + G = \{x + y \mid x \in F,\ y \in G\}$.

— La somme est **directe** ($F \oplus G$) si $F \cap G = \{0\}$: la décomposition est alors unique.

— **Formule de Grassmann** :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

— F et G sont **supplémentaires** dans E si $F \oplus G = E$, ce qui équivaut (en dimension finie) à $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître un sous-espace

— a) **Oui.** $(0, 0, 0)$ vérifie l'équation ; et si $x + y + z = 0$ et $x' + y' + z' = 0$, alors $\lambda x + x' + \ldots = 0$ par linéarité. F est un **plan vectoriel**, de dimension 2.

— b) **Non.** $(0, 0, 0)$ ne vérifie pas $0 = 1$: le vecteur nul n'appartient pas à G. C'est un **plan affine**, pas vectoriel.

— c) **Non.** $(1, 0, 0) \in H$ et $(0, 1, 0) \in H$, mais leur somme $(1, 1, 0)$ vérifie $xy = 1 \neq 0$: H n'est pas stable par addition. C'est la **réunion** de deux plans, et une réunion n'est presque jamais un sous-espace.

— **Réflexe de départ** : toujours tester 0_E — c'est le test le plus rapide pour éliminer un candidat.

Réponse. a) oui · b) non ($0 \notin G$) · c) non (pas stable par somme).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Famille libre

On cherche λ, μ, ν tels que $\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = 0$.

— Le système est $\begin{cases} \lambda + 2\mu + \nu = 0 \\ 2\lambda + \mu - \nu = 0 \\ 3\lambda - 3\nu = 0 \end{cases}$

— La troisième donne $\lambda = \nu$.

— La première devient $2\lambda + 2\mu = 0$, donc $\mu = -\lambda$.

— On vérifie la deuxième : $2\lambda - \lambda - \lambda = 0$ — elle est **automatiquement** satisfaite.

— Il existe donc des solutions non nulles, par exemple $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $\nu = 1$.

— **Vérification** : $(1,2,3) - (2,1,0) + (1,-1,-3) = (0,0,0)$ ✓

— **Conclusion** : la famille est **liée**, et $u_3 = u_2 - u_1$. Son rang est 2.

Réponse. Non, elle est liée : $u_1 - u_2 + u_3 = 0$.

Correction de l'exercice 3 – Base d'un sous-espace

On **paramètre** les solutions de l'équation.

— L'équation donne $z = x + 2y$, avec x et y libres.

— Donc $(x, y, z) = (x,\ y,\ x + 2y) = x(1,0,1) + y(0,1,2)$.

— La famille $((1,0,1),\ (0,1,2))$ est **génératrice** de F.

— **Liberté** : si $x(1,0,1) + y(0,1,2) = 0$, les deux premières coordonnées donnent $x = 0$ et $y = 0$. La famille est libre.

— **Conclusion** : c'est une **base** de F, donc $\dim F = 2$ — F est un plan vectoriel.

— **Contrôle** : $(1,0,1)$ vérifie $1 + 0 - 1 = 0$ ✓ et $(0,1,2)$ vérifie $0 + 2 - 2 = 0$ ✓.

— **Règle** : une équation linéaire non triviale dans $\mathbb{R}^n$ définit un hyperplan de dimension $n - 1$.

Réponse. Base $((1,0,1),(0,1,2))$, $\dim F = 2$.

Correction de l'exercice 4 – Espace de polynômes

$\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4, de base canonique $\left(1, X, X^2, X^3\right)$.

— F **est un sous-espace** : $P \mapsto P(1)$ est **linéaire**, et F est son noyau.

— $P(1) = 0$ équivaut à $(X-1) \mid P$, donc $P = (X-1)Q$ avec $\deg Q \leq 2$.

— Une base de F est donc $\left(X - 1,\ X(X-1),\ X^2(X-1)\right)$, image de la base $\left(1, X, X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

— **Liberté** : ces trois polynômes sont de degrés 1, 2, 3, donc **échelonnés en degré** : la famille est libre.

— **Dimension** : $\dim F = 3$.

— **Contrôle par le théorème du rang** : l'application $P \mapsto P(1)$ va de $\mathbb{R}_3[X]$ (dimension 4) dans $\mathbb{R}$, elle est surjective, donc $\dim \ker = 4 - 1 = 3$ ✓

Réponse. $\left(X - 1,\ X(X-1),\ X^2(X-1)\right)$, $\dim F = 3$.

Correction de l'exercice 5 – Somme directe

— **Intersection** : un vecteur de F s'écrit $(a, b, 0)$, un vecteur de G s'écrit $(0, 0, c)$. L'égalité impose $a = b = c = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$.

— **Dimensions** : $\dim F = 2$ et $\dim G = 1$, donc $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Conclusion** : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ — les deux sous-espaces sont **supplémentaires**.
— **Décomposition explicite** : $(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$, et elle est **unique**.
— **Contrôle par Grassmann** : $\dim(F + G) = 2 + 1 - 0 = 3$, donc $F + G = \mathbb{R}^3$ ✓
— **Attention au vocabulaire** : « supplémentaire » (somme directe égale à E) n'est pas « complémentaire » (au sens des ensembles). Un sous-espace admet une **infinité** de supplémentaires.

Réponse. $F \cap G = \{0\}$ et $2 + 1 = 3$: somme directe égale à $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 6 – Formule de Grassmann

Grassmann : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 6 - \dim(F \cap G)$.

— Or $F + G \subset \mathbb{R}^4$, donc $\dim(F + G) \leq 4$.
— D'où $6 - \dim(F \cap G) \leq 4$, soit $\dim(F \cap G) \geq 2$.
— Par ailleurs $F \cap G \subset F$, donc $\dim(F \cap G) \leq 3$, avec égalité si et seulement si $F = G$.
— **Conclusion** : $\dim(F \cap G) \in \{2, 3\}$; l'intersection vaut 3 si $F = G$, et 2 sinon.
— **Conséquence remarquable** : deux hyperplans distincts de $\mathbb{R}^4$ se coupent toujours selon un plan — ils ne peuvent jamais être « disjoints » au sens vectoriel.
— **Analogie en dimension 3** : deux plans distincts se coupent selon une droite.

Réponse. $\dim(F \cap G) = 3$ si $F = G$, sinon 2.

Correction de l'exercice 7 – Rang d'une famille

Le rang est la dimension de l'espace engendré ; on échelonne.

— $u_3 = u_1 + u_2$: en effet $(1 + 1,\ 1 + 2,\ 1 + 3) = (2, 3, 4)$ ✓ — u_3 est **redondant**.
— $u_4 = u_2 - u_1$: $(1 - 1,\ 2 - 1,\ 3 - 1) = (0, 1, 2)$ ✓ — u_4 aussi.
— Il reste (u_1, u_2), qui est **libre** : les vecteurs ne sont pas colinéaires (les rapports $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ diffèrent).
— **Conclusion** : rg = 2.
— **Conséquence** : les quatre vecteurs sont **coplanaires**, dans le plan $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
— **Contrôle** : quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont nécessairement liés — le rang ne pouvait de toute façon pas dépasser 3.

Réponse. Rang 2 (les quatre vecteurs sont coplanaires).

Correction de l'exercice 8 – Base incomplète

La famille est libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires) ; il manque **un** vecteur.

— On teste un vecteur de la base canonique, par exemple $e_1 = (1, 0, 0)$.
— **Test de liberté** : on résout $\lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 1) + \nu(1, 0, 0) = 0$.
— Troisième coordonnée : $\mu = 0$. Deuxième : $\lambda + \mu = 0$ donc $\lambda = 0$. Première : $\nu = 0$.
— La famille $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0))$ est **libre** et compte $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs : c'est une **base**.
— **Astuce du théorème de la base incomplète** : il suffit de tester les vecteurs de la base canonique un à un ; l'un d'eux convient nécessairement.
— **Vérification alternative** : le déterminant de la matrice des trois vecteurs vaut $-1 \neq 0$, ce qui confirme la liberté.

Réponse. Ajouter $(1, 0, 0)$: la famille obtenue est une base.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Espace de fonctions

Supposons $a + b\cos x + c\cos 2x = 0$ **pour tout réel** x.

— $x = 0$: $a + b + c = 0$.
— $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\cos\pi = -1$, donc $a - c = 0$.
— $x = \pi$: $a - b + c = 0$.
— En additionnant les première et troisième : $2a + 2c = 0$, donc $a = -c$; avec $a = c$, on obtient $a = c = 0$, puis $b = 0$.
— **Conclusion** : la famille est **libre**.
— **Méthode générale** : pour une famille de fonctions, on évalue en des points bien choisis (ou on dérive) jusqu'à obtenir un système dont la seule solution est nulle.
— **Remarque** : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, donc cette famille engendre le même espace que $\left(1, \cos x, \cos^2 x\right)$.

Réponse. Évaluations en 0, $\frac{\pi}{2}$, π : seule la solution nulle convient.

Correction de l'exercice 10 – Supplémentaires de fonctions

Intersection. Si f est à la fois paire et impaire, alors $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$.

— Donc $2f(x) = 0$ pour tout x : $f = 0$. Ainsi $P \cap I = \{0\}$.

Somme. Pour une fonction f quelconque, on pose

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

— g est **paire** ($g(-x) = g(x)$) et h est **impaire** ($h(-x) = -h(x)$).
— Et $g + h = f$. Donc toute fonction se décompose : $P + I$ est l'espace tout entier.
— **Conclusion** : $P \oplus I = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
— **Exemple** : $e^x = \cosh x + \sinh x$, où cosh est paire et sinh impaire — c'est exactement cette décomposition.

Réponse. $P \cap I = \{0\}$ et $f = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Correction de l'exercice 11 – Coordonnées dans une base

On cherche α, β tels que $u = \alpha(1, 1) + \beta(1, -1)$.

— Le système est $\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$
— En additionnant : $2\alpha = 6$, donc $\alpha = 3$; puis $\beta = 2$.
— **Coordonnées** : $u = 3(1, 1) + 2(1, -1)$, soit $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_B$.
— **Vérification** : $3(1, 1) + 2(1, -1) = (3 + 2,\ 3 - 2) = (5, 1)$ ✓
— **Unicité** : c'est la propriété fondamentale d'une base — les coordonnées d'un vecteur y sont **uniques**.
— **Attention** : les coordonnées dépendent de la base **et de l'ordre** des vecteurs qui la composent.

Réponse. $(3, 2)$ dans la base B.

Correction de l'exercice 12 – Réunion de deux sous-espaces

a) Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$, qui est un sous-espace ; de même si $G \subset F$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $x+y$ appartient au sous-espace $F\cup G$, donc à F ou à G.

— Si $x+y\in G$, alors $x=(x+y)-y\in G$ (différence de deux vecteurs de G) : c'est exclu puisque $x\notin G$.
— Donc $x+y\in F$, et $y=(x+y)-x\in F$.
— Ceci vaut pour tout $y\in G$: $G\subset F$.

c) On a démontré l'équivalence :

$$F\cup G \text{ est un sous-espace} \Leftrightarrow F\subset G \text{ ou } G\subset F$$

— Deux droites distinctes $D_1=\text{Vect}(1,0)$ et $D_2=\text{Vect}(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$: $(1,0)+(0,1)=(1,1)$ n'est sur aucune des deux, la réunion n'est pas stable par somme. Le bon objet est la **somme** $D_1+D_2=\mathbb{R}^2$, plus petit sous-espace contenant la réunion.

Réponse. $F\cup G$ est un sous-espace si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

Correction de l'exercice 13 – Matrices symétriques et antisymétriques

a) La transposition est linéaire : $(\lambda M+N)^{\mathsf{T}}=\lambda M^{\mathsf{T}}+N^{\mathsf{T}}$. Si $M,N\in S_n$, cette matrice vaut $\lambda M+N$; et $0\in S_n$. Même raisonnement pour A_n.

b) Même idée que pour les fonctions paires et impaires :

— si $M\in S_n\cap A_n$, alors $M=M^{\mathsf{T}}=-M$, donc $M=0$;
— toute matrice s'écrit

$$M=\frac{M+M^{\mathsf{T}}}{2}+\frac{M-M^{\mathsf{T}}}{2}$$

où le premier terme est symétrique et le second antisymétrique, car $\left(M-M^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}=M^{\mathsf{T}}-M$.

c) Avec E_{ij} les matrices élémentaires :

— base de S_n : les E_{ii} et les $E_{ij}+E_{ji}$ pour $i<j$, soit $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ matrices ;
— base de A_n : les $E_{ij}-E_{ji}$ pour $i<j$ (la diagonale d'une antisymétrique est nulle, car $m_{ii}=-m_{ii}$), soit $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices.
— Contrôle : $\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2=\dim E$, comme l'exige la somme directe.

d) $M^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$, donc $M=\begin{pmatrix}1&3\\3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

Réponse. $S_n\oplus A_n=M_n(\mathbb{R})$, de dimensions $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$; d) $\begin{pmatrix}1&3\\3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 14 – Ajouter un vecteur à une famille

a) Si $v\in\text{Vect}(u_i)$, toute combinaison $\sum\lambda_i u_i+\mu v$ se réécrit comme combinaison des u_i seuls : les deux espaces sont égaux (l'inclusion réciproque est évidente). Réciproquement, si les deux espaces sont égaux, v, qui est dans le premier, est dans le second.

b) Supposons $\sum\lambda_i u_i+\mu v=0$.

— Si $\mu\neq 0$, alors $v=-\frac{1}{\mu}\sum\lambda_i u_i\in\text{Vect}(u_i)$.
— Donc, si $v\notin\text{Vect}(u_i)$, on a $\mu=0$, puis $\sum\lambda_i u_i=0$ et tous les λ_i sont nuls par liberté : la famille est libre.
— Réciproquement, si $v=\sum\alpha_i u_i$, la relation $\sum\alpha_i u_i-v=0$ est non triviale (coefficient -1 devant v) : la famille est liée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) (u_1, u_2) est libre (non colinéaires). On cherche une équation du plan qu'ils engendrent : $x(1,0,2) + y(0,1,-1) = (x, y, 2x - y)$, donc

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \{(x, y, z) \mid z = 2x - y\}$$

— $v = (1, a, 0)$ est dans ce plan si et seulement si $0 = 2 - a$, soit $a = 2$.

— Pour $a \neq 2$, la famille (u_1, u_2, v) est libre et compte 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: c'est une base. Pour $a = 2$, $v = u_1 + 2u_2$.

Réponse. c) Base si et seulement si $a \neq 2$ (pour $a = 2$, $v = u_1 + 2u_2$).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : intersection et somme

Dimension de F : les deux générateurs ne sont pas colinéaires, donc $\dim F = 2$.

Dimension de G : les conditions $x = y$ et $z = t$ donnent $(x, x, z, z) = x(1,1,0,0) + z(0,0,1,1)$.

— Ces deux vecteurs sont libres, donc $\dim G = 2$.

Intersection. Un vecteur de F s'écrit $a(1,0,1,0) + b(0,1,0,1) = (a, b, a, b)$.

— Les conditions de G imposent $a = b$ (première contrainte $x = y$) et $a = b$ (seconde $z = t$).

— Donc $F \cap G = \mathrm{Vect}((1,1,1,1))$ et $\dim(F \cap G) = 1$.

Somme. Par **Grassmann** :

$$\dim(F + G) = 2 + 2 - 1 = 3$$

— $F + G$ est donc un **hyperplan** de $\mathbb{R}^4$: la somme n'est **pas directe**, et $F + G \neq \mathbb{R}^4$.

— **Contrôle** : $(1,0,0,0)$ appartient-il à $F + G$? Un vecteur de $F + G$ s'écrit $(a + c, b + c, a + d, b + d)$, dont les coordonnées vérifient $x - y - z + t = 0$. Or $1 - 0 - 0 + 0 = 1 \neq 0$: ce vecteur n'y est pas, ce qui confirme $\dim(F + G) = 3$.

Réponse. $\dim F = \dim G = 2$, $\dim(F \cap G) = 1$, $\dim(F + G) = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).