Plaquette 2 – Sous-espaces vectoriels : reconnaître, décrire, engendrer

Espaces vectoriels — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sous-espaces vectoriels.

— **Caractérisation** : $F \subset E$ est un sous-espace si $0_E \in F$ et

$$\forall (x, y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathrm{K},\quad \lambda x + y \in F$$

— **Espaces de référence** : K^n, $\mathrm{K}[X]$, $\mathrm{K}_n[X]$, $M_{n,p}(\mathrm{K})$, $\mathrm{K}^{\mathbb{N}}$ (suites), $F(I, \mathrm{K})$ (fonctions), $C(I)$, $C^k(I)$.

— **Noyau** : l'ensemble des solutions d'un système d'équations **linéaires homogènes** (en les coordonnées, les coefficients, les valeurs de la fonction…) est un sous-espace.

— **Sous-espace engendré** : $\mathrm{Vect}(A)$ = ensemble des combinaisons linéaires **finies** d'éléments de A = plus petit sous-espace contenant A = intersection de tous les sous-espaces contenant A.

— Intersection de sous-espaces : sous-espace. Somme $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

— **Contre-exemples types** : une équation avec un second membre non nul ($0 \notin F$) ; une condition non linéaire (produit, carré, inégalité, « de degré exactement n », « inversible »).

— **Passer des générateurs aux équations** : on écrit que $(x_1, \dots, x_n) = \sum \lambda_i u_i$ a une solution en λ, et les conditions de compatibilité du pivot sont les équations cherchées.

Correction de l'exercice 1 – Quatre parties de R3

On reconnaît d'abord la forme : **équations linéaires homogènes** ou **paramétrage linéaire** donnent un sous-espace ; toute autre condition est suspecte.

a) A est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène $x - 2y = 0$: c'est un sous-espace (le noyau de $(x, y, z) \mapsto x - 2y$), un **plan** vectoriel.

b) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$: B est la **réunion** des plans $x = y$ et $x = -y$.
Contre-exemple : $(1, 1, 0) \in B$ et $(1, -1, 0) \in B$, mais leur somme $(2, 0, 0)$ vérifie $4 \neq 0$. Ce n'est pas un sous-espace.

c) $C = \mathrm{Vect}((1, 2, 3))$: sous-espace engendré par un vecteur non nul, c'est une **droite** vectorielle.

d) D est l'ensemble des solutions d'un système homogène : sous-espace. $x = y$ puis $z = -2x$:

$$D = \{(x, x, -2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 1, -2))$$

— intersection de deux plans non confondus : une droite.

e) $0 \in G$ et G est stable par somme, mais pas par multiplication par un scalaire négatif : $(1, 0, 0) \in G$ et $-1 \cdot (1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin G$. Ce n'est pas un sous-espace (c'est un demi-espace).

Réponse. Sous-espaces : A (plan), C (droite), $D = \mathrm{Vect}(1, 1, -2)$; pas B (réunion de deux plans) ni G (demi-espace).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Parties de l'espace des suites

Le test est toujours le même :

$$0 \in F \quad \text{et} \quad \forall (u,v) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u + v \in F$$

a) Oui : la suite nulle converge, et si $u \to \ell$ et $v \to \ell'$, alors $\lambda u + v \to \lambda\ell + \ell'$ (opérations sur les limites).

b) Non : la suite nulle ne tend pas vers 1. (Et la somme de deux suites tendant vers 1 tend vers 2.)

c) Oui : 0 est bornée, et si $|u_n| \leq M$, $|v_n| \leq M'$, alors $|\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda| M + M'$.

d) Oui : la condition est **linéaire homogène** en la suite. Si u et v la vérifient, $w = \lambda u + v$ vérifie

$$w_{n+2} = \lambda(u_{n+1} + u_n) + v_{n+1} + v_n = w_{n+1} + w_n$$

e) Non : (2^n) et (3^n) sont géométriques, mais $w_n = 2^n + 3^n$ ne l'est pas : $w_0 = 2$, $w_1 = 5$, $w_2 = 13$, et $\frac{5}{2} \neq \frac{13}{5}$.

f) Non : $u_n = 2n$ est croissante et $v_n = (-1)^n - 2n$ est décroissante, car

$$v_{n+1} - v_n = -2(-1)^n - 2 \leq 0$$

— mais $u_n + v_n = (-1)^n$ n'est pas monotone.

Réponse. Sous-espaces : a), c), d). Pas des sous-espaces : b) (0 exclue), e) $(2^n + 3^n)$, f) ($2n + ((-1)^n - 2n)$).

Correction de l'exercice 3 – Parties d'un espace de fonctions

a) F_1 est le noyau de l'application linéaire $f \mapsto f(0)$: sous-espace. F_2 ne contient pas la fonction nulle : ce n'en est pas un.

b) Oui : la fonction nulle est 1-périodique, et si $f(x+1) = f(x)$ et $g(x+1) = g(x)$ pour tout x, alors $(\lambda f + g)(x+1) = (\lambda f + g)(x)$.

c) Non. $\cos(2\pi x)$ est 1-périodique et $\cos(2\pi\sqrt{2}\,x)$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}$-périodique. Leur somme h vérifie $h(0) = 2$; si elle était T-périodique ($T > 0$), on aurait $h(T) = 2$, donc $\cos(2\pi T) = 1$ et $\cos(2\pi\sqrt{2}\,T) = 1$, c'est-à-dire $T \in \mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}\,T \in \mathbb{Z}$, d'où $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}T}{T} \in \mathbb{Q}$: absurde. Deux périodes « incommensurables » ne se combinent pas.

d) Oui : l'équation est **linéaire homogène**. Si $f'' + f = 0$ et $g'' + g = 0$, alors

$$(\lambda f + g)'' + (\lambda f + g) = \lambda(f'' + f) + (g'' + g) = 0$$

— et $C^2(\mathbb{R})$ est lui-même un sous-espace de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

e) Oui : c'est le noyau de la forme linéaire $f \mapsto \int_0^1 f$ (linéarité de l'intégrale).

Réponse. Sous-espaces : F_1, F_3, F_5, F_6 ; pas F_2 ($0 \notin F_2$) ni F_4 (somme de périodes incommensurables).

Correction de l'exercice 4 – Parties d'un espace de matrices

a) Oui : noyau de la forme linéaire $M \mapsto \mathrm{tr}M = \sum m_{ii}$.

b) Non : la matrice nulle n'est pas inversible. (Et $I_n + (-I_n) = 0$.)

c) Non : E_{11} et E_{22} sont de rang 1, leur somme $E_{11} + E_{22}$ est de rang 2.

d) Oui : $0 \in C(A)$, et si $AM = MA$, $AN = NA$, alors

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$A(\lambda M+N)=\lambda AM+AN=\lambda MA+NA=(\lambda M+N)A$$

e) Non : $E_{12}^2=0$ et $E_{21}^2=0$, mais $(E_{12}+E_{21})^2=E_{11}+E_{22}\neq 0$ (en taille 2 : c'est I_2).

Commutant de $A=I_2+N$ avec $N=E_{12}$: $AM=MA\Leftrightarrow NM=MN$. Pour $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$:

— $NM=\begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix}$ et $MN=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}$;
— égalité $\Leftrightarrow c=0$ et $d=a$.
— $C(A)=\left\langle\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\right\rangle=\mathrm{Vect}(I_2,N)$, plan de $M_2(\mathbb{R})$.

Réponse. Sous-espaces : a), d) ; pas b), c), e). $C(A)=\mathrm{Vect}(I_2,E_{12})$.

Correction de l'exercice 5 – Parties de l'espace des polynômes

a) A est le noyau de $P\mapsto P(1)-P(0)$, linéaire : sous-espace. Il contient les constantes et X^2-X, pas X.

b) Non : $0\notin B$ (son degré est $-\infty$) ; et $(X^3+X)+(-X^3)=X$ est de degré 1.

c) Oui : $P\mapsto P(X+1)-P(X)$ est linéaire, C est son noyau. Description : si $P\in C$, alors $P(n)=P(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (récurrence), donc $P-P(0)$ a une infinité de racines et est nul :

$$C=\mathbb{R}_0[X]\quad\text{(les polynômes constants)}$$

d) Non : la condition n'est pas linéaire. $P=1$ vérifie $1=1$, mais $2P=2$ donne $2\neq 4$.

e) Oui : si $(X-a)^2\mid P$ et $(X-a)^2\mid Q$, alors $(X-a)^2\mid \lambda P+Q$, et $(X-a)^2\mid 0$. On a $E_a=(X-a)^2\,\mathbb{R}[X]$, et aussi $E_a=\{P\mid P(a)=P'(a)=0\}$ (racine au moins double), intersection de deux noyaux de formes linéaires.

Réponse. Sous-espaces : A, C (constantes), E_a (multiples de $(X-a)^2$) ; pas B ni D.

Correction de l'exercice 6 – Égalité de deux sous-espaces engendrés

Méthode : on montre les **deux inclusions**, chacune en exprimant les générateurs d'un espace comme combinaisons des générateurs de l'autre (un Vect étant le plus petit sous-espace contenant ses générateurs).

a) $u+v$ et $u-v$ sont dans $\mathrm{Vect}(u,v)$, d'où $\mathrm{Vect}(u+v,u-v)\subset\mathrm{Vect}(u,v)$. Réciproquement :

$$u=\frac{1}{2}(u+v)+\frac{1}{2}(u-v),\qquad v=\frac{1}{2}(u+v)-\frac{1}{2}(u-v)$$

— donc $u,v\in\mathrm{Vect}(u+v,u-v)$, et l'inclusion inverse suit.

b) L'inclusion $\mathrm{Vect}(au+bv,cu+dv)\subset\mathrm{Vect}(u,v)$ est claire. Posons $x=au+bv$ et $y=cu+dv$; on a

$$dx-by=(ad-bc)u,\qquad -cx+ay=(ad-bc)v$$

— si $\delta=ad-bc\neq 0$: $u=\frac{1}{\delta}(dx-by)$ et $v=\frac{1}{\delta}(-cx+ay)$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(x,y)$. Le cas a) correspond à $a=b=c=1$, $d=-1$, $\delta=-2$.

c) Sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $1+1=0$, donc $u-v=u+v=(1,1)$:
$\mathrm{Vect}(u+v,u-v)=\mathrm{Vect}((1,1))=\{(0,0),(1,1)\}$, qui n'est pas $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. La preuve de a) divisait par 2, ce qui est impossible dans ce corps ($\delta=-2=0$).

Réponse. Double inclusion ; possible dès que $ad-bc\neq 0$; sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathrm{Vect}(u+v,u-v)$ n'est qu'une droite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – D'une équation à des générateurs, et retour

a) Les deux générateurs de F vérifient l'équation de G : $1-1+0=0$ et $0-1+1=0$. Donc $F \subset G$ (G est un sous-espace contenant les générateurs de F).

— Réciproquement, si $x-y+z=0$, alors $y=x+z$ et $(x,y,z)=(x,x+z,z)=x(1,1,0)+z(0,1,1)\in F$.

— Donc $F=G$. (Avec les dimensions : $F\subset G$, et tous deux sont des plans.)

b) $(x,y,z,t)\in H$ si et seulement si le système $\lambda u+\mu v=(x,y,z,t)$ a une solution :

$$\begin{cases}\lambda = x\\ 2\lambda+\mu = y\\ \mu = z\\ \lambda-\mu = t\end{cases}$$

— Les équations 1 et 3 donnent $\lambda=x$, $\mu=z$; les deux autres deviennent des **conditions de compatibilité** :

— $2x+z=y$ et $x-z=t$.

— $H=\{(x,y,z,t)\mid 2x-y+z=0 \text{ et } x-z-t=0\}$. Contrôle : u donne $2-2+0=0$ et $1-0-1=0$; v donne $0-1+1=0$ et $0-1+1=0$.

c) Pour w : $2\times 2-3+(-1)=0$ et $2-(-1)-3=0$. Les deux équations sont vérifiées : $w\in H$, et en effet $w=2u-v$.

Réponse. a) $F=G$; b) H:$2x-y+z=0$, $x-z-t=0$; c) oui, $w=2u-v$.

Correction de l'exercice 8 – Somme de sous-espaces et sous-espace engendré

a) $0=0+0\in F+G$. Si $s=x+y$ et $s'=x'+y'$ avec $x,x'\in F$ et $y,y'\in G$:

$$\lambda s+s' = (\lambda x+x')+(\lambda y+y')\in F+G$$

— De plus $x=x+0$ pour $x\in F$ et $y=0+y$ pour $y\in G$: $F\cup G\subset F+G$.

b) Un sous-espace H qui contient F et G contient toutes les sommes $x+y$ (stabilité par addition) : $F+G\subset H$. Ainsi $F+G$ est **le plus petit** sous-espace contenant $F\cup G$, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(F\cup G)$.

c) Un élément de $F+G$ s'écrit $\sum \alpha_i u_i+\sum \beta_j v_j$: c'est une combinaison de la famille réunie. Réciproquement, une telle combinaison se sépare en une partie dans F et une partie dans G. D'où l'égalité : **on réunit les familles génératrices**.

d) G : $x=z$, soit $(x,y,x)=x(1,0,1)+y(0,1,0)$, donc $G=\mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$.

— Le générateur $(1,0,1)$ de F vérifie $x=z$: $F\subset G$.

— Donc $F+G=G$ (le plan $x=z$) et $F\cap G=F$ (la droite). La somme n'agrandit rien quand un espace contient l'autre.

Réponse. $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$; on réunit les familles génératrices ; d) $F\subset G$, donc $F+G=G$ et $F\cap G=F$.

Correction de l'exercice 9 – Sous-espace engendré par une partie quelconque

a) Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces et $F=\bigcap_i F_i$. 0 est dans chaque F_i, donc dans F. Si $x,y\in F$, alors pour chaque i, $\lambda x+y\in F_i$; donc $\lambda x+y\in F$.

b) Une combinaison linéaire de deux combinaisons finies est encore une combinaison finie, et 0 (combinaison vide ou à coefficients nuls) est dans W ; chaque $a\in A$ s'écrit $1\cdot a$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc W est un sous-espace contenant A, et, V étant l'intersection de tous ceux-là, $V \subset W$.

— Inversement, tout sous-espace contenant A contient les combinaisons finies d'éléments de A (stabilité), donc contient W : $W \subset V$.

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{F \supset A} F = \left\langle \sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_k \mid p \in \mathbb{N},\, a_k \in A,\, \lambda_k \in \mathrm{K} \right\rangle$$

c) Tout polynôme est une combinaison finie des X^n : $\mathrm{Vect}(A) = \mathbb{R}[X]$. Avec les $(X-1)^n$, c'est encore $\mathbb{R}[X]$: par la formule de Taylor, $P = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$.

d) Une combinaison finie des e_k est une suite **nulle à partir d'un certain rang**. La suite constante 1 ne l'est pas : elle n'est pas dans $\mathrm{Vect}(A)$, bien qu'on ait envie d'écrire « $\sum_k e_k$ ». Une somme infinie n'est pas une combinaison linéaire.

Réponse. $\mathrm{Vect}(A)$ = combinaisons finies = intersection des sous-espaces contenant A ; c) $\mathbb{R}[X]$ dans les deux cas ; d) non, $\mathrm{Vect}(e_k)$ = suites nulles à partir d'un rang.

Correction de l'exercice 10 – Le corps de base compte : C sur R ou sur C

Le mot « sous-espace » n'a de sens qu'une fois fixé le **corps des scalaires** : la stabilité exigée est $\lambda x + y \in F$ pour λ **dans ce corps**.

a) Sur $\mathbb{R}$: $0 \in \mathbb{R}$ et $\lambda x + y \in \mathbb{R}$ pour λ, x, y réels. Sur $\mathbb{C}$: $1 \in \mathbb{R}$ mais $i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R}$.

b) Soit F un sous-espace non nul du $\mathbb{C}$-espace $\mathbb{C}$, et $z_0 \in F$ non nul. Pour tout $w \in \mathbb{C}$:

$$w = \frac{w}{z_0} \cdot z_0 \in F$$

— donc $F = \mathbb{C}$. Les seuls sous-espaces sont $\{0\}$ et $\mathbb{C}$ (espace de dimension 1).

c) $D_\theta = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathrm{e}^{i\theta})$: sous-espace du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$. C'est la **droite** passant par l'origine et faisant l'angle θ avec l'axe réel. Le $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$ est de dimension 2 (base $(1, i)$) : il a une infinité de droites.

d) Sur $\mathbb{R}$: $(0,0)$ y est, et $\lambda(z, \overline{z}) + (w, \overline{w}) = (\lambda z + w, \overline{\lambda z + w})$ pour λ **réel** (car $\overline{\lambda} = \lambda$) : c'est un sous-espace. Sur $\mathbb{C}$: $i(1,1) = (i, i)$ et $\overline{i} = -i \neq i$: ce n'en est pas un.

Réponse. a) sous-espace sur $\mathbb{R}$, pas sur $\mathbb{C}$; b) $\{0\}$ et $\mathbb{C}$; c) droite d'angle θ ; d) oui sur $\mathbb{R}$, non sur $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 11 – Fonctions vérifiant une relation fonctionnelle

a) La condition est linéaire homogène en f : si $f, g \in F_a$, alors

$$(\lambda f + g)(x+1) = \lambda a f(x) + a g(x) = a(\lambda f + g)(x)$$

— et la fonction nulle convient.

b) F_1 : les fonctions 1-périodiques. F_{-1} : $f(x+1) = -f(x)$, donc $f(x+2) = f(x)$; ce sont les fonctions 2-périodiques « antipériodiques de période 1 », par exemple $x \mapsto \cos(\pi x)$.

— Si $f \in F_1 \cap F_{-1}$, alors $f(x) = f(x+1) = -f(x)$, donc $f(x) = 0$ pour tout x.

c) Posons $g(x) = a^{-x} f(x)$ (bien défini pour $a > 0$). Alors

$$g(x+1) = a^{-x-1} f(x+1) \quad \text{et} \quad g(x+1) = g(x) \Leftrightarrow a^{-x-1} f(x+1) = a^{-x} f(x) \Leftrightarrow f(x+1) = a f(x)$$

— Donc $F_2 = \{x \mapsto 2^x g(x) \mid g \text{ 1-périodique}\}$: par exemple 2^x, $2^x \sin(2\pi x)$.

d) Non : $f = 1 \in F_1$ et $g = \cos(\pi \cdot) \in F_{-1}$, mais $h = f + g$ vérifie $h(0) = 2$ et $h(1) = 0$, donc $h(1) \neq h(0)$ et $h(1) \neq -h(0)$: $h \notin F_1 \cup F_{-1}$. (C'est cohérent avec le critère : aucun des deux ne contient l'autre.)

Réponse. F_1 : 1-périodiques ; $F_{-1} \ni \cos(\pi x)$; $F_1 \cap F_{-1} = \{0\}$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$F_2 = \{2^x g(x),\ g \text{ 1-périodique}\}$; réunion non stable.

Correction de l'exercice 12 – Linéariser : polynômes trigonométriques

a) Par les formules de duplication :

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

— ce sont des combinaisons de 1, $\cos 2x$, $\sin 2x$: elles sont dans T_2.

b) Par la formule d'Euler, $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}$, d'où

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x \in T_3$$

— Contrôle en $x = 0$: $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$.

c) Par bilinéarité du produit, il suffit de le vérifier sur les générateurs. Pour $0 \le p \le n$ et $0 \le q \le m$:

— $\cos px \cos qx = \frac{1}{2}(\cos(p+q)x + \cos(p-q)x)$;

— $\sin px \sin qx = \frac{1}{2}(\cos(p-q)x - \cos(p+q)x)$;

— $\sin px \cos qx = \frac{1}{2}(\sin(p+q)x + \sin(p-q)x)$.

— Les fréquences $|p \pm q|$ sont au plus $n+m$ (et $\cos(-kx) = \cos kx$, $\sin(-kx) = -\sin kx$) : chaque produit est dans T_{n+m}.

d) $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$ avec $\sin^2 x \in T_2$, donc $\sin^4 x \in T_4$. Explicitement :

— $\sin^4 x = \frac{(1-\cos 2x)^2}{4} = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{8}$;

— $\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$. Contrôle en $x = \frac{\pi}{2}$: $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1$.

Réponse. $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$; $T_n T_m \subset T_{n+m}$; $\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$.

Correction de l'exercice 13 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

a) Relation linéaire homogène : si $u, v \in R$, $w = \lambda u + v$ vérifie $w_{n+2} = \lambda(5u_{n+1} - 6u_n) + 5v_{n+1} - 6v_n = 5w_{n+1} - 6w_n$. La suite nulle est dans R.

b) $(q^n) \in R \Leftrightarrow q^{n+2} = 5q^{n+1} - 6q^n$ pour tout n ; pour $q \neq 0$, cela équivaut à l'**équation caractéristique**

$$q^2 - 5q + 6 = 0 \Leftrightarrow q \in \{2, 3\}$$

— ($q = 0$ donne la suite $(1, 0, 0, \ldots)$, qui ne vérifie pas la relation au rang 0 : $0 \neq 5 \times 0 - 6 \times 1$.)

c) Par récurrence, u_0 et u_1 déterminent $u_2 = 5u_1 - 6u_0$, puis tous les termes : deux suites de R ayant mêmes u_0 et u_1 sont égales.

— Soit $u \in R$. On cherche α, β tels que $v_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$ ait les mêmes deux premiers termes :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ 2\alpha + 3\beta = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \beta = u_1 - 2u_0, \quad \alpha = 3u_0 - u_1$$

— Ce système a toujours une solution ; $v \in R$ par a) et b), et v a mêmes premiers termes que u, donc $u = v$. Ainsi $R \subset \mathrm{Vect}(2^n, 3^n)$, et l'inclusion inverse vient de a) et b).

d) $\alpha = 3 - 4 = -1$ et $\beta = 4 - 2 = 2$: $u_n = 2 \times 3^n - 2^n$. Contrôle : $u_0 = 1$, $u_1 = 6 - 2 = 4$, $u_2 = 18 - 4 = 14 = 5 \times 4 - 6 \times 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $q \in \{2,3\}$; $R = \mathrm{Vect}(2^n, 3^n)$; $u_n = 2\times 3^n - 2^n$.

Correction de l'exercice 14 – Fonctions à symétrie : f(1 - x) = f(x)

a) $f(1-x) = f(x)$: la courbe est **symétrique par rapport à la droite** $x = \frac{1}{2}$.
$f(1-x) = -f(x)$: la courbe est **symétrique par rapport au point** $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

b) Les deux conditions sont linéaires homogènes : sous-espaces. On adapte la décomposition paire/impaire en posant, pour f quelconque,

$$s(x) = \frac{f(x)+f(1-x)}{2}, \qquad a(x) = \frac{f(x)-f(1-x)}{2}$$

— $s(1-x) = \frac{f(1-x)+f(x)}{2} = s(x)$, $a(1-x) = -a(x)$, et $s + a = f$: $S + A = F$.
— Si $f \in S \cap A$, $f(x) = f(1-x) = -f(x)$, donc $f = 0$. La somme est directe.

c) $f(1-x) = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$, donc
— $s(x) = \frac{x^2+1-2x+x^2}{2} = x^2 - x + \frac{1}{2}$ et $a(x) = \frac{x^2-1+2x-x^2}{2} = x - \frac{1}{2}$.
— Contrôle : $s + a = x^2$, $a\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ comme il se doit pour une fonction de A.

d) On écrit $P = \alpha + \beta(X - \frac{1}{2}) + \gamma(X - \frac{1}{2})^2$ (base adaptée au point $\frac{1}{2}$). La transformation $x \mapsto 1 - x$ change $x - \frac{1}{2}$ en $-(x - \frac{1}{2})$, donc $P(1-X) = \alpha - \beta(X - \frac{1}{2}) + \gamma(X - \frac{1}{2})^2$.

— $P \in S \Leftrightarrow \beta = 0$: $S \cap \mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, (X - \frac{1}{2})^2)$. (Contrôle : $s(x) = x^2 - x + \frac{1}{2} = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ y est bien.)

Réponse. $S \oplus A = F$; $x^2 = \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)$; $S \cap \mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, (X - \frac{1}{2})^2)$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : quatre sous-espaces de M2(R)

On écrit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on traduit chaque condition en **équations linéaires** sur (a, b, c, d).

a) Ce sont des ensembles de solutions de systèmes homogènes :
— S : $b = c$, d'où $M = aE_{11} + b(E_{12} + E_{21}) + dE_{22}$;
— T : $a + d = 0$, d'où $M = a(E_{11} - E_{22}) + bE_{12} + cE_{21}$;
— U : $c = 0$, engendré par E_{11}, E_{12}, E_{22} ;
— C : commutant, sous-espace (même preuve que pour tout commutant).

b) $S \cap T$: $b = c$ et $d = -a$, soit

$$S \cap T = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{Vect}(E_{11} - E_{22},\, E_{12} + E_{21})$$

— $S \cap U$: $b = c$ et $c = 0$: les matrices **diagonales**, $\mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22})$.

c) $MJ = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ et $JM = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$: l'égalité donne $b = c$ et $a = d$.

— $C = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{Vect}(I_2, J)$; ces matrices vérifient $b = c$: $C \subset S$.

d) $T \cap C$: $a = d$, $b = c$ et $a + d = 0$, donc $a = d = 0$: $T \cap C = \mathrm{Vect}(J)$, une droite : J est à la fois de trace nulle et commute avec elle-même.

Réponse. $S \cap T = \mathrm{Vect}(E_{11} - E_{22}, E_{12} + E_{21})$; $S \cap U$ = diagonales ; $C = \mathrm{Vect}(I_2, J) \subset S$; $T \cap C = \mathrm{Vect}(J)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).