Plaquette 4 – Dimension finie : rang, sommes, supplémentaires

Espaces vectoriels — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

La dimension est un **outil de preuve** : pour montrer qu'une famille est une base, il suffit, quand on connaît la dimension, de vérifier **une seule** des deux propriétés (libre ou génératrice) ; pour montrer que $F = G$, il suffit de $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$; pour montrer que $F \oplus G = E$, il suffit de $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$. On calcule une dimension en exhibant une base (souvent en paramétrant), ou par la formule $n - r$ pour l'espace des solutions d'un système homogène de rang r ; on relie les dimensions d'une somme et d'une intersection par **Grassmann**.

Exercice 1 – Dimensions de sous-espaces de matrices

Dans $M_n(\mathbb{R})$ (de dimension n^2), déterminer la dimension de :

a) D_n, les matrices diagonales ;

b) T_n^+, les matrices triangulaires supérieures ;

c) T, les matrices de trace nulle ;

d) L, les matrices dont chaque ligne est de somme nulle.

Vérifier les résultats pour $n = 2$.

Exercice 2 – Hyperplan et droite supplémentaire

Soit E de dimension n, H un hyperplan de E et $a \in E \setminus H$.

a) Montrer que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

b) Application : dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, $H = \{P \mid P(1) = 0\}$. Justifier que H est un hyperplan et que $E = H \oplus \mathbb{R}_0[X]$.

c) Décomposer $P = X^3 + 2X$ selon cette somme directe.

d) Montrer que $\mathrm{Vect}(X)$ est aussi un supplémentaire de H : un sous-espace a en général une infinité de supplémentaires.

Exercice 3 – Grassmann dans R5

Dans $\mathbb{R}^5$, soient F de dimension 3 et G de dimension 4.

a) Montrer que $\dim(F \cap G) \geq 2$.

b) Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(F \cap G)$? Donner un exemple pour chacune.

c) Même question pour deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 4 – Un supplémentaire dans les polynômes

Soit $n \geq 1$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$.

a) Montrer que $F = \{X(X-1)Q \mid Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\}$ (avec $\mathbb{R}_{-1}[X] = \{0\}$) et en déduire $\dim F$.

b) Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Expliciter la décomposition de P : quel polynôme de degré ≤ 1 apparaît ?

d) Décomposer $P = X^3$.

Exercice 5 – Trois droites du plan : piège de la somme directe

Dans $\mathbb{R}^2$, soient $D_1 = \text{Vect}(1,0)$, $D_2 = \text{Vect}(0,1)$, $D_3 = \text{Vect}(1,1)$.

a) Vérifier que $D_i \cap D_j = \{0\}$ pour $i \neq j$.

b) La somme $D_1 + D_2 + D_3$ est-elle directe ? Exhiber deux décompositions différentes de $(1,1)$.

c) Rappeler la définition d'une somme directe de p sous-espaces et montrer que, en dimension finie, $F_1 + \ldots + F_p$ est directe si et seulement si $\dim(F_1 + \ldots + F_p) = \sum \dim F_i$.

d) Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = D_n \oplus N^+ \oplus N^-$ (diagonales, triangulaires strictement supérieures, strictement inférieures).

Exercice 6 – Rang d'une famille selon un paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère dans $\mathbb{R}^3$: $u = (1,1,a)$, $v = (1,a,1)$, $w = (a,1,1)$.

a) Calculer $u + v + w$ et échelonner la famille.

b) Déterminer $\text{rg}(u,v,w)$ selon a.

c) Pour chaque cas, décrire $\text{Vect}(u,v,w)$.

Exercice 7 – Racine double imposée

Soit $n \geq 2$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace et que $F = (X-1)^2 \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

b) En déduire une base de F et sa dimension.

c) Retrouver $\dim F$ en considérant F comme l'intersection de deux hyperplans, et justifier que ces hyperplans sont distincts.

d) Déterminer un supplémentaire de F et la décomposition de X^n.

Exercice 8 – Somme et intersection dans R4

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, et $G = \{(x,y,z,t) \mid x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$.

a) Déterminer une base et la dimension de G.

b) Déterminer $F \cap G$.

c) En déduire $\dim(F+G)$, puis une équation de $F+G$.

Exercice 9 – Égalité par inclusion et dimension

a) Montrer que si $F \subset G$ sont deux sous-espaces de dimension finie et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.

b) Application : montrer que $(1+X, 1-X, X^2+X)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ en ne vérifiant que la liberté.

c) Application : montrer que $\text{Vect}((1,2,3),(2,3,4)) = \text{Vect}((0,1,2),(1,1,1))$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Le résultat de a) est faux en dimension infinie : montrer que $X\mathbb{R}[X] \subsetneq \mathbb{R}[X]$ et exhiber une « bijection linéaire » entre les deux.

Exercice 10 – Solutions d'un système homogène : n moins le rang

On considère le système homogène à 5 inconnues

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Déterminer le rang du système.

b) En déduire la dimension de l'ensemble S des solutions, puis en donner une base.

c) Un système homogène de 4 équations à 7 inconnues peut-il n'avoir que la solution nulle ?

Exercice 11 – Intersection de conditions sur un polynôme

Dans $\mathbb{R}_4[X]$, soit $F = \{P \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \left\langle P \mid \int_0^2 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\rangle$.

a) Déterminer $\dim F$ et une base de F.

b) Justifier que G est un hyperplan de $\mathbb{R}_4[X]$.

c) Déterminer $F \cap G$ et sa dimension. Vérifier la cohérence avec Grassmann.

Exercice 12 – Tous les supplémentaires ont la même dimension

Soit E de dimension n et F un sous-espace de dimension p.

a) Montrer que F admet au moins un supplémentaire, et que tout supplémentaire de F est de dimension $n - p$.

b) Dans $\mathbb{R}^3$, soit $D = \mathrm{Vect}(1,1,1)$. Montrer que le plan $P_c : x + y + cz = 0$ est un supplémentaire de D si et seulement si $c \neq -2$.

c) Pour $c = 0$, décomposer $(3,0,0)$ selon $D \oplus P_0$.

d) Un sous-espace G de dimension $n - p$ tel que $F \cap G = \{0\}$ est-il toujours un supplémentaire de F ?

Exercice 13 – Complexes vus comme espace réel : dimension

a) Quelle est la dimension de $\mathbb{C}_n[X]$ comme $\mathbb{C}$-espace ? comme $\mathbb{R}$-espace ? Donner une base réelle.

b) Soit $F = \{P \in \mathbb{C}_2[X] \mid P(i) = 0\}$. Déterminer $\dim_{\mathbb{C}} F$, puis $\dim_{\mathbb{R}} F$.

c) Soit $G = \{P \in \mathbb{C}_2[X] \mid P$ à coefficients réels$\}$. Est-ce un $\mathbb{C}$-sous-espace ? un $\mathbb{R}$-sous-espace ? Quelle est sa dimension réelle ?

d) Déterminer $F \cap G$ (dimension réelle).

Exercice 14 – Rang et ajout de vecteurs

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de rang r et v un vecteur.

a) Montrer que $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p, v) \in \{r, r+1\}$, avec $r+1$ si et seulement si $v \notin \mathrm{Vect}(u_i)$.

b) Dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer le rang de $(1, \cos^2, \sin^2, \cos(2\cdot))$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Déterminer le rang de $(1, \cos, \cos^2, \cos^3, \cos(3\,\cdot))$.

Exercice 15 – Synthèse : l'espace des carrés magiques 3x3

Un **carré magique** est une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ dont les trois lignes, les trois colonnes et les deux diagonales ont la même somme $s(M)$. On note K leur ensemble.

a) Montrer que K est un sous-espace de $M_3(\mathbb{R})$ et que s est linéaire sur K.

b) Montrer que le coefficient central vaut $\frac{s(M)}{3}$ (additionner la ligne et la colonne du milieu et les deux diagonales).

c) Soient J la matrice dont tous les coefficients valent 1, et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $J, A, B \in K$ et que (J, A, B) est libre.

d) On admet que $\dim K = 3$. Écrire le carré de Lo Shu $L = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ dans la base (J, A, B).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).