Plaquette 5 – Espaces vectoriels en action : suites, signaux, codes et courbes

Espaces vectoriels — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Beaucoup de problèmes « concrets » ont un ensemble de solutions qui est un **espace vectoriel** (ou un translaté d'un tel espace) : suites récurrentes linéaires, équations différentielles linéaires, signaux, mots d'un code, courbes d'interpolation. La démarche est toujours la même : (1) reconnaître la **linéarité** ; (2) déterminer la **dimension**, souvent en comptant les données qui déterminent une solution (conditions initiales, valeurs en des points) ; (3) trouver une **base commode** (géométrique, exponentielle, de Lagrange, de Haar, de Bernstein…) ; (4) lire la solution cherchée comme des **coordonnées** dans cette base.

Exercice 1 – Interpolation : l'unicité donne l'existence

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts et $y_0, \dots, y_n$ des réels quelconques.

a) Montrer qu'il existe **au plus** un $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_i) = y_i$ pour tout i.

b) Écrire la recherche de $P = \sum_k c_k X^k$ comme un système linéaire carré en $(c_0, \dots, c_n)$. En déduire l'existence à partir de a).

c) Application : déterminer $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 2$, $P(2) = 7$.

Exercice 2 – Fibonacci et la formule de Binet

Soit R l'espace des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, et (F_n) la suite de Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$).

a) Montrer que $\varphi : u \mapsto (u_0, u_1)$ est linéaire et bijective de R sur $\mathbb{R}^2$. En déduire $\dim R = 2$.

b) Déterminer les suites géométriques de R, et en déduire une base de R.

c) En déduire la formule de Binet pour F_n.

d) La suite de Lucas vérifie la même relation avec $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. L'exprimer dans la même base.

Exercice 3 – Racine double : la base (r^n, n r^n)

Soit R l'espace des suites vérifiant $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

a) Déterminer l'équation caractéristique. Pourquoi les suites géométriques de R ne suffisent-elles pas à former une base ?

b) Montrer que $v_n = n2^n$ appartient à R.

c) En déduire une base de R (on admet $\dim R = 2$), puis la suite telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$.

d) Calculer u_5 de deux manières.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Oscillations et courant triphasé

Soit $\omega > 0$ et S l'ensemble des solutions réelles de $y'' + \omega^2 y = 0$; on admet que c'est un espace vectoriel de dimension 2.

a) Montrer que $(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ est une base de S.

b) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ est dans S et donner ses coordonnées.

c) Réciproquement, montrer que toute solution non nulle s'écrit $A\cos(\omega t - \varphi)$ avec $A > 0$.

d) Les trois tensions d'un réseau triphasé sont $v_k(t) = V\cos\left(\omega t - \frac{2k\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$. Montrer qu'elles sont liées et que $v_0 + v_1 + v_2 = 0$.

Exercice 5 – Le code de Hamming (7, 4)

On travaille dans F_2^7 ($\mathrm{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Le code de Hamming C est l'ensemble des mots $x = (x_1, \dots, x_7)$ vérifiant

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que C est un sous-espace de dimension 4. Combien contient-il de mots ?

b) Exprimer x_1, x_2, x_4 en fonction de x_3, x_5, x_6, x_7 et coder le message $(x_3, x_5, x_6, x_7) = (1, 0, 1, 1)$.

c) Le mot est transmis avec une erreur sur un seul bit ; on reçoit $y = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$. Calculer les trois sommes du système pour y (le **syndrome**). Montrer que, lu en binaire $(s_3 s_2 s_1)$, il donne la position de l'erreur, et corriger.

Exercice 6 – Le corps Q(racine de 2)

Soit $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

a) Montrer que K est un $\mathbb{Q}$-sous-espace de $\mathbb{R}$ de dimension 2, de base $(1, \sqrt{2})$.

b) Montrer que K est stable par produit.

c) Montrer que tout $x \in K$ non nul a un inverse dans K (penser à la quantité conjuguée). Calculer l'inverse de $1 + \sqrt{2}$ et de $3 + 2\sqrt{2}$.

d) Le nombre $\sqrt{3}$ appartient-il à K ?

Exercice 7 – Reconnaître la dimension infinie

a) Montrer qu'un espace E contenant, pour tout n, une famille libre à n éléments n'est pas de dimension finie.

b) En déduire que $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont de dimension infinie.

c) Soit F l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en est une base (au sens : toute suite de F est combinaison linéaire **finie**, unique, des e_k).

d) Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Fonctions chapeaux et interpolation affine par morceaux

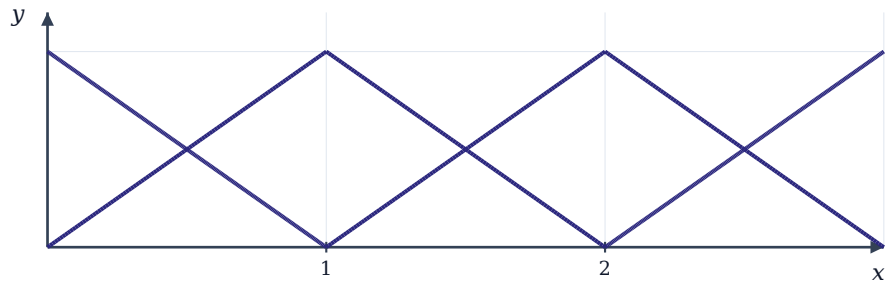
Soit A l'ensemble des fonctions continues sur $[0,3]$, affines sur chacun des intervalles $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$. Pour $i \in \{0,1,2,3\}$, φ_i est l'élément de A qui vaut 1 en i et 0 aux trois autres entiers (fonction « chapeau »).

a) Montrer que A est un sous-espace de $C([0,3])$ et qu'un élément de A est déterminé par ses valeurs en $0,1,2,3$.

b) Montrer que $(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est une base de A et que $f=\sum f(i)\varphi_i$.

c) Montrer que $(1,x,|x-1|,|x-2|)$ est une autre base de A.

d) Écrire φ_1 dans cette seconde base.



Les quatre fonctions chapeaux, de sommets 0, 1, 2 et 3.

Exercice 9 – Suites périodiques de période 3

Soit P_3 l'ensemble des suites complexes 3-périodiques ($u_{n+3}=u_n$ pour tout n), et $j=\mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

a) Montrer que P_3 est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension 3.

b) Montrer que $a=(1)_n$, $b=(j^n)_n$, $c=(j^{2n})_n$ appartiennent à P_3 et forment une base.

c) Décomposer la suite $\delta=(1,0,0,1,0,0,\ldots)$ dans cette base.

d) En déduire une expression de δ_n à l'aide de $\cos\frac{2n\pi}{3}$.

Exercice 10 – Compresser un signal : la base de Haar

Un signal de 4 échantillons est un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On considère

$$h_0=(1,1,1,1),\quad h_1=(1,1,-1,-1),\quad h_2=(1,-1,0,0),\quad h_3=(0,0,1,-1)$$

a) Montrer que (h_0,h_1,h_2,h_3) est une base de $\mathbb{R}^4$ (base de Haar).

b) Déterminer les coordonnées du signal $x=(9,7,3,5)$. Interpréter le coefficient de h_0.

c) On « compresse » en supprimant les deux plus petits coefficients (en valeur absolue). Quel signal obtient-on ? Quelle erreur commet-on ?

d) Pourquoi le calcul des coordonnées est-il ici particulièrement simple ?

Exercice 11 – Polynômes de Bernstein et courbes de Bézier

Pour $0\le k\le 3$, soit $B_k=\binom{3}{k}X^k(1-X)^{3-k}$.

a) Montrer que (B_0,B_1,B_2,B_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (considérer la plus petite puissance de X dans chaque B_k).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que $\sum_k B_k = 1$ et $\sum_k \frac{k}{3} B_k = X$.

c) Une courbe de Bézier de points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 du plan est $t \mapsto \sum_k B_k(t) P_k$, $t \in [0,1]$. Avec $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (4,0)$, calculer le point obtenu pour $t = \frac{1}{2}$.

d) Justifier que la courbe passe par P_0 et P_3, et que si les P_k sont alignés régulièrement ($P_k = A + \frac{k}{3}(B - A)$), la courbe est le segment $[AB]$ parcouru à vitesse constante.

Exercice 12 – Faisceau de plans contenant une droite

Dans l'espace, soit D la droite d'équations $x + y + z = 1$ et $x - y = 0$.

a) Montrer que pour $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, l'équation $\lambda(x + y + z - 1) + \mu(x - y) = 0$ définit un plan contenant D.

b) On admet que tout plan contenant D est de cette forme. Déterminer le plan contenant D et le point $A(1,0,1)$.

c) Déterminer le plan contenant D et parallèle à l'axe (Oz).

d) Interpréter : quel est l'espace vectoriel sous-jacent, et quelle est sa dimension ?

Exercice 13 – Polynômes de Tchebychev

On définit $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.

a) Calculer T_2 et T_3, et montrer que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour $n \leq 3$.

b) Montrer que $\deg T_n = n$ et en déduire que $(T_0, \ldots, T_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

c) Écrire X^2 et X^3 dans cette base, et interpréter avec $X = \cos\theta$.

d) Écrire $P = 4X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ dans cette base.

Exercice 14 – Équation avec second membre : un espace affine

On considère l'équation différentielle (E):$y' + y = x$ sur $\mathbb{R}$, et l'équation homogène (H):$y' + y = 0$.

a) Montrer que l'ensemble S_H des solutions de (H) est un espace vectoriel et que $S_H = \mathrm{Vect}(e^{-x})$ (on pourra étudier $x \mapsto e^x y(x)$).

b) L'ensemble S_E des solutions de (E) est-il un espace vectoriel ?

c) Chercher une solution particulière affine, et en déduire S_E.

d) Déterminer la solution telle que $y(0) = 3$.

Exercice 15 – Synthèse : géométrie de l'espace (Z/2Z)^3

Soit $E = \mathrm{F}_2^3$, espace de dimension 3 sur le corps $\mathrm{F}_2 = \{0,1\}$.

a) Combien E a-t-il d'éléments ? Combien un sous-espace de dimension k en a-t-il ?

b) Montrer que les droites vectorielles de E sont en bijection avec les vecteurs non nuls. Combien y en a-t-il ?

c) Un plan vectoriel est le noyau d'une équation $ax + by + cz = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Montrer qu'il y a exactement 7 plans, et que chaque plan contient 3 droites.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Montrer que chaque droite est contenue dans exactement 3 plans et que deux plans distincts se coupent selon une droite. (Ces 7 « points » et 7 « droites » forment le plan de Fano.)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).