Plaquette 3 – Familles libres, génératrices et bases

Espaces vectoriels — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_p)$ est **libre**, on part d'une relation $\sum \lambda_i x_i = 0$ et l'on prouve que tous les λ_i sont nuls : pivot de Gauss dans K^n ; évaluation en des points, dérivation, passage à la limite ou intégration pour des fonctions ; degrés échelonnés pour des polynômes ; arithmétique pour des nombres. Pour montrer qu'elle est **liée**, on exhibe une relation non triviale. Une **base** se reconnaît par l'existence et l'unicité de la décomposition, ou, en dimension n connue, par « n vecteurs libres » ; les **coordonnées** d'un vecteur s'obtiennent en résolvant un système ou par une formule (Taylor, Lagrange).

Exercice 1 – Liberté selon un paramètre

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (0,0,1,1)$ et $u_4 = (a,0,0,1)$, où $a \in \mathbb{R}$.

a) Pour quelles valeurs de a la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?

b) Dans le cas où elle est liée, donner une relation de dépendance et le rang de la famille.

c) Pour $a = 0$, déterminer les coordonnées de $e_1 = (1,0,0,0)$ dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4).

Exercice 2 – Extraire une base d'une famille génératrice

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (2,0,2)$, $u_3 = (0,1,1)$, $u_4 = (1,1,2)$, $u_5 = (0,0,1)$.

a) Justifier que la famille est liée sans aucun calcul.

b) Repérer les relations évidentes, puis extraire une base de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_5)$. Ce sous-espace est-il $\mathbb{R}^3$?

c) Décrire la méthode générale : on parcourt la famille et l'on garde u_k si et seulement si… Pourquoi obtient-on une base ?

Exercice 3 – Compléter une base d'un hyperplan

Soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.

a) Montrer que $v_1 = (1,-1,0,0)$, $v_2 = (0,1,-1,0)$, $v_3 = (0,0,1,-1)$ forment une base de H.

b) Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Donner les coordonnées de $w = (1,2,3,-6)$ dans la base (v_1, v_2, v_3) de H.

Exercice 4 – Transformer une famille libre

Soit (u, v, w) une famille libre d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

a) La famille $(u+v, v+w, w+u)$ est-elle libre ?

b) La famille $(u-v, v-w, w-u)$ est-elle libre ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Plus généralement, pour $a \in \mathbb{R}$, étudier la liberté de $(u + av, v + aw, w + au)$.

Exercice 5 – Translatées du sinus

Dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $f_a(x) = \sin(x + a)$.

a) Montrer que $f_a \in \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ pour tout a, puis que $(\sin, \cos)$ est libre.

b) En déduire que (f_0, f_1, f_2) est liée, et déterminer son rang.

c) Trouver explicitement une relation $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 = 0$ non triviale.

Exercice 6 – Fonctions valeur absolue translatées

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, soit $g_k : x \mapsto |x - k|$, fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $(g_1, \dots, g_n)$ est libre (étudier la dérivabilité d'une combinaison nulle).

b) La famille $(1, x, g_1, g_2)$ est-elle libre ?

c) Écrire la fonction h affine par morceaux, continue, nulle sur $]-\infty, 1]$, de pente 1 sur $[1, 2]$ et constante égale à 1 sur $[2, +\infty[$ comme combinaison de 1, x, g_1, g_2.

Exercice 7 – Exponentielles de fréquences distinctes

Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ des réels et $e_k : x \mapsto \mathrm{e}^{a_k x}$.

a) Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: partir de $\sum \lambda_k e_k = 0$, diviser par $\mathrm{e}^{a_n x}$ et faire tendre x vers $+\infty$.

b) Redémontrer le résultat par récurrence sur n en dérivant.

c) En déduire que $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 8 – Puissances réelles

Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ des réels et $p_k : x \mapsto x^{\alpha_k}$ sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer que $(p_1, \dots, p_n)$ est libre.

b) La famille $\left(x \mapsto x,\ x \mapsto x\ln x,\ x \mapsto x\ln^2 x\right)$ est-elle libre ?

c) Montrer que (x^{α_k}) est libre en se ramenant à l'exercice sur les exponentielles.

Exercice 9 – Sinus de fréquences entières : intégrer

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $s_k : x \mapsto \sin(kx)$.

a) Calculer $I_{jk} = \int_0^{2\pi} \sin(jx)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$ pour $j, k \geq 1$.

b) En déduire que $(s_1, \dots, s_n)$ est libre.

c) Soit $f = \sum_{k=1}^{n} b_k s_k$. Exprimer b_k à l'aide d'une intégrale de f.

d) Application : sachant que $\sin^3 x = \sum_k b_k \sin(kx)$ pour une famille finie de coefficients, calculer b_1 et b_3 par ces intégrales, puis vérifier par linéarisation.

Exercice 10 – Un polynôme et ses dérivées

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré exactement n.

a) Montrer que $(P, P', P'', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Application : $P = X^3$. Exprimer $1, X, X^2$ dans la base (P, P', P'', P''').

c) Montrer que tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ s'écrit $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et donner ses coordonnées dans cette base en fonction de a, b, c, d.

Exercice 11 – Coordonnées dans une base de Taylor

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $B_a = (1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$.

a) Justifier que B_a est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Rappeler la formule donnant les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

c) Écrire $P = X^3 - 2X + 5$ dans la base B_1 de $\mathbb{R}_3[X]$.

d) En déduire, sans calcul supplémentaire, $P(1)$, $P'(1)$, et le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$.

Exercice 12 – Base de Lagrange

Soient $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, et L_0, L_1, L_2 les polynômes de Lagrange associés.

a) Calculer L_0, L_1, L_2 et vérifier que $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.

b) Montrer que (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et que les coordonnées de P sont $(P(a_0), P(a_1), P(a_2))$.

c) Calculer $L_0 + L_1 + L_2$ et $-L_0 + 2L_2$ sans développer.

d) Déterminer l'unique $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(-1) = 4$, $P(0) = 1$, $P(2) = 7$.

Exercice 13 – C2 sur R et sur C

a) Montrer que $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension 2 et un $\mathbb{R}$-espace de dimension 4 ; donner une base dans chaque cas.

b) Soient $x = (1, i)$ et $y = (i, -1)$. La famille (x, y) est-elle libre sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

c) Plus généralement, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{C}$-espace E, montrer que $(e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n)$ est une base de E vu comme $\mathbb{R}$-espace.

Exercice 14 – Liberté sur Q : racines et logarithmes

On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (les scalaires sont rationnels).

a) Montrer que $(1, \sqrt{2})$ est libre sur $\mathbb{Q}$, mais que $(1, \sqrt{2})$ est liée sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

c) Montrer que $(\ln 2, \ln 3)$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

d) La famille $(\ln 2, \ln 3, \ln 6)$ est-elle libre sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 15 – Synthèse : base binomiale et sommes de puissances

On pose $H_0 = 1$ et, pour $k \geq 1$, $H_k = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$, de sorte que $H_k(n) = \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Vérifier que $H_{k+1}(X+1) - H_{k+1}(X) = H_k$ (formule de Pascal) et en déduire $\sum_{m=0}^{N} H_k(m) = H_{k+1}(N+1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Déterminer les coordonnées de X^2 et de X^3 dans cette base.

d) En déduire des formules pour $\sum_{m=1}^{N} m^2$ et $\sum_{m=1}^{N} m^3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).