Plaquette 1 – Sous-espaces, familles libres, bases et dimension

Espaces vectoriels — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On prouve qu'un ensemble est un **sous-espace vectoriel** par la caractérisation, on teste la **liberté** d'une famille, on extrait ou complète une **base**, et on utilise la **formule de Grassmann** pour les sommes.

Exercice 1 – Reconnaître un sous-espace

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

a) $F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$
b) $G = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$
c) $H = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$

Exercice 2 – Famille libre

La famille $((1, 2, 3), (2, 1, 0), (1, -1, -3))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 – Base d'un sous-espace

Déterminer une base et la dimension de $F = \left\langle (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \right\rangle$.

Exercice 4 – Espace de polynômes

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$. Déterminer une base de F et sa dimension.

Exercice 5 – Somme directe

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et $G = \mathrm{Vect}((0, 0, 1))$.

Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 6 – Formule de Grassmann

Dans $\mathbb{R}^4$, soient F et G deux sous-espaces de dimension 3. Que peut-on dire de $\dim(F \cap G)$?

Exercice 7 – Rang d'une famille

Déterminer le rang de la famille $((1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 3, 4), (0, 1, 2))$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 – Base incomplète

Compléter la famille libre $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Espace de fonctions

Montrer que la famille $(x \mapsto 1,\ x \mapsto \cos x,\ x \mapsto \cos 2x)$ est libre dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10 – Supplémentaires de fonctions

Montrer que dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les sous-espaces P (fonctions paires) et I (fonctions impaires) sont supplémentaires.

Exercice 11 – Coordonnées dans une base

Soit $B = ((1,1),(1,-1))$, base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées de $u = (5,1)$ dans B.

Exercice 12 – Réunion de deux sous-espaces

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E.

a) Montrer que si $F \subset G$ ou $G \subset F$, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel.

b) Réciproquement, on suppose que $F \cup G$ est un sous-espace et que $F \not\subset G$. En prenant $x \in F \setminus G$ et $y \in G$ quelconque, étudier $x + y$ et en déduire $G \subset F$.

c) Conclure, et illustrer par deux droites distinctes du plan.

Exercice 13 – Matrices symétriques et antisymétriques

Dans $E = M_n(\mathbb{R})$, on note S_n l'ensemble des matrices symétriques ($M^{\mathsf{T}} = M$) et A_n celui des matrices antisymétriques ($M^{\mathsf{T}} = -M$).

a) Montrer que ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

b) Montrer que $S_n \oplus A_n = E$.

c) Donner une base de chacun et en déduire leurs dimensions ; vérifier la cohérence avec b).

d) Décomposer $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 – Ajouter un vecteur à une famille

Soient $(u_1, \dots, u_p)$ une famille d'un espace E et $v \in E$.

a) Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p, v) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ si et seulement si $v \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

b) On suppose $(u_1, \dots, u_p)$ libre. Montrer que $(u_1, \dots, u_p, v)$ est libre si et seulement si $v \notin \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

c) Application dans $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1,0,2)$, $u_2 = (0,1,-1)$. Pour quelles valeurs de a la famille (u_1, u_2, v) avec $v = (1, a, 0)$ est-elle une base ?

Exercice 15 – Synthèse : intersection et somme

Dans $\mathbb{R}^4$, soient

$$F = \mathrm{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1)) \qquad G = \{(x,y,z,t) \mid x = y \text{ et } z = t\}$$

Déterminer $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F \cap G)$ et $\dim(F + G)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).