Plaquette 2 – Sous-espaces vectoriels : reconnaître, décrire, engendrer

Espaces vectoriels — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour montrer qu'une partie F d'un espace connu E est un sous-espace, on vérifie $0_E \in F$ et la stabilité par combinaison linéaire $\lambda x + y$; plus rapidement, on reconnaît un **noyau** (ensemble des solutions d'équations linéaires homogènes) ou un **sous-espace engendré** Vect(…). Pour montrer qu'une partie n'en est **pas** un, un seul contre-exemple suffit : $0_E \notin F$, ou deux éléments dont la somme sort de F, ou un élément dont un multiple sort de F. Enfin, on passe d'une description à l'autre : **équations** ↔ **générateurs**, par le pivot de Gauss.

Exercice 1 – Quatre parties de R3

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles des sous-espaces vectoriels ? Justifier, et décrire géométriquement celles qui le sont.

a) $A = \{(x, y, z) \mid x = 2y\}$;
b) $B = \{(x, y, z) \mid x^2 = y^2\}$;
c) $C = \{(t, 2t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$;
d) $D = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - y = 0\}$;
e) $G = \{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$.

Exercice 2 – Parties de l'espace des suites

Dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, les parties suivantes sont-elles des sous-espaces ?

a) les suites convergentes ;
b) les suites qui tendent vers 1 ;
c) les suites bornées ;
d) les suites vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout n ;
e) les suites géométriques ;
f) les suites monotones.

Exercice 3 – Parties d'un espace de fonctions

Dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les parties suivantes sont-elles des sous-espaces ?

a) $F_1 = \{f \mid f(0) = 0\}$ et $F_2 = \{f \mid f(0) = 1\}$;
b) F_3 : les fonctions 1-périodiques ;
c) F_4 : les fonctions périodiques (de période quelconque) ;
d) $F_5 = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\}$;
e) $F_6 = \left\langle f \in C([0,1]) \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\rangle$, sous-partie de $C([0,1])$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Parties d'un espace de matrices

Dans $M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$), les parties suivantes sont-elles des sous-espaces ?

a) les matrices de trace nulle ;

b) les matrices inversibles ;

c) les matrices de rang au plus 1 ;

d) le **commutant** $C(A) = \{M \mid AM = MA\}$ d'une matrice A fixée ;

e) les matrices M telles que $M^2 = 0$.

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer $C(A)$.

Exercice 5 – Parties de l'espace des polynômes

Dans $\mathbb{R}[X]$, les parties suivantes sont-elles des sous-espaces ? Pour celles qui le sont, en donner une description simple.

a) $A = \{P \mid P(0) = P(1)\}$;

b) B : les polynômes de degré exactement 3 ;

c) $C = \{P \mid P(X+1) = P(X)\}$;

d) $D = \{P \mid P(X^2) = P(X)^2\}$;

e) $E_a = \{P \mid (X-a)^2 \text{ divise } P\}$.

Exercice 6 – Égalité de deux sous-espaces engendrés

Soient u, v deux vecteurs d'un K-espace E ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

a) Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u+v, u-v)$.

b) Plus généralement, montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(au+bv, cu+dv)$ dès que $ad - bc \neq 0$.

c) Que devient a) dans l'espace $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$?

Exercice 7 – D'une équation à des générateurs, et retour

a) Soit $F = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Montrer que $F = G$.

b) Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer un système d'équations de $H = \mathrm{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 2, 0, 1)$ et $v = (0, 1, 1, -1)$.

c) Le vecteur $w = (2, 3, -1, 3)$ appartient-il à H ?

Exercice 8 – Somme de sous-espaces et sous-espace engendré

Soient F et G deux sous-espaces de E.

a) Montrer que $F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$ est un sous-espace contenant $F \cup G$.

b) Montrer que tout sous-espace contenant $F \cup G$ contient $F + G$. En déduire $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

c) Si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_q)$, montrer que $F + G = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Application : dans $\mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(1,0,1)$ et $G = \{(x,y,z) \mid x = z\}$. Déterminer $F+G$ et $F \cap G$.

Exercice 9 – Sous-espace engendré par une partie quelconque

Soit A une partie (éventuellement infinie) d'un espace E.

a) Montrer qu'une intersection quelconque de sous-espaces de E est un sous-espace.

b) On note V l'intersection de tous les sous-espaces contenant A, et W l'ensemble des combinaisons linéaires **finies** d'éléments de A. Montrer que W est un sous-espace contenant A, puis que $V = W$.

c) Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer $\text{Vect}(A)$ pour $A = \{X^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, puis pour $A = \{(X-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

d) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit $A = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ où e_k est la suite valant 1 au rang k et 0 ailleurs. La suite constante égale à 1 est-elle dans $\text{Vect}(A)$?

Exercice 10 – Le corps de base compte : C sur R ou sur C

a) Montrer que $\mathbb{R}$ est un sous-espace du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais pas un sous-espace du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

b) Quels sont les sous-espaces du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

c) Montrer que, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $D_\theta = \{re^{i\theta} \mid r \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$; le représenter dans le plan complexe.

d) La partie $\{(z,\overline{z}) \mid z \in \mathbb{C}\}$ de $\mathbb{C}^2$ est-elle un sous-espace sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 11 – Fonctions vérifiant une relation fonctionnelle

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $F_a = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = af(x)\}$.

a) Montrer que F_a est un sous-espace de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) Décrire F_1 et F_{-1} à l'aide de la périodicité. Montrer que $F_1 \cap F_{-1} = \{0\}$.

c) Pour $a > 0$, montrer que $f \in F_a$ si et seulement si $x \mapsto a^{-x}f(x)$ est 1-périodique. En déduire une description de F_2.

d) La réunion $F_1 \cup F_{-1}$ est-elle un sous-espace ?

Exercice 12 – Linéariser : polynômes trigonométriques

On note $T_n = \text{Vect}(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx)$, sous-espace de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\cos^2 x$, $\sin x \cos x$ et $\sin^2 x$ appartiennent à T_2.

b) Montrer que $\cos^3 x \in T_3$ en l'écrivant comme combinaison explicite.

c) Montrer que si $f \in T_n$ et $g \in T_m$, alors $fg \in T_{n+m}$ (on pourra utiliser les formules de produit en cosinus et sinus).

d) En déduire que $\sin^4 x \in T_4$ et l'écrire explicitement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit R l'ensemble des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que R est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) Déterminer les suites géométriques (q^n) qui appartiennent à R.

c) Montrer que toute suite de R est entièrement déterminée par (u_0, u_1), puis que $R = \text{Vect}((2^n), (3^n))$.

d) Déterminer la suite de R telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$.

Exercice 14 – Fonctions à symétrie : f(1 - x) = f(x)

Soit $S = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x,\ f(1-x) = f(x)\}$ et $A = \{f \mid \forall x,\ f(1-x) = -f(x)\}$.

a) Interpréter géométriquement l'appartenance à S et à A sur la courbe de f.

b) Montrer que S et A sont des sous-espaces supplémentaires de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

c) Décomposer $f(x) = x^2$ selon $S \oplus A$.

d) Montrer que $S \cap \mathbb{R}_2[X]$ (en identifiant un polynôme à sa fonction) est $\text{Vect}(1, (X - \frac{1}{2})^2)$.

Exercice 15 – Synthèse : quatre sous-espaces de M2(R)

Dans $E = M_2(\mathbb{R})$, on considère S (matrices symétriques), T (matrices de trace nulle), U (matrices triangulaires supérieures) et $C = \{M \mid MJ = JM\}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que ce sont des sous-espaces et en donner une famille génératrice.

b) Déterminer $S \cap T$ et $S \cap U$.

c) Déterminer C et montrer que $C \subset S$.

d) Déterminer $T \cap C$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).