Plaquette 2 – Calculer une espérance : transfert, linéarité, indicatrices

Espérance et variance — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Espérance d'une variable finie.

— $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x)$; **transfert** : $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_x f(x)\,\mathbb{P}(X = x)$.

— **Linéarité** : $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ (sans hypothèse d'indépendance) ; **positivité** et croissance.

— **Indicatrices** : $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$, donc

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

— **Variable à valeurs dans** $[\![0, n]\!]$: $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k)$.

— **Indépendance** : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

— **Fonction génératrice** $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$: $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.

— Espérances usuelles : uniforme sur $[\![1, n]\!]$: $\frac{n+1}{2}$; $B(p)$: p ; $B(n, p)$: np ; hypergéométrique $H(N, m, n)$: $n\frac{m}{N}$.

Correction de l'exercice 1 – Espérance du maximum de deux dés

a) Par définition :

$$\mathbb{E}(M) = \sum_{k=1}^{6} k\frac{2k-1}{36} = \frac{1+6+15+28+45+66}{36} = \frac{161}{36} \approx 4{,}47$$

b) $\mathbb{P}(M \geq k) = 1 - \mathbb{P}(M \leq k-1) = 1 - \frac{(k-1)^2}{36}$, donc
$\mathbb{E}(M) = 6 - \frac{0+1+4+9+16+25}{36} = 6 - \frac{55}{36} = \frac{161}{36}$.

c) max + min est la somme des deux dés, d'espérance 7. Par linéarité :
$\mathbb{E}(m) = 7 - \frac{161}{36} = \frac{91}{36} \approx 2{,}53$.

Réponse. $\mathbb{E}(M) = \frac{161}{36}$; $\mathbb{E}(m) = \frac{91}{36}$.

Correction de l'exercice 2 – Espérance par la queue de la loi

a) Dans la somme double, $\mathbb{P}(X = j)$ apparaît pour chaque $k \leq j$, soit j fois :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{E}(X)$$

b) Pour une issue où $X = j$, les indicatrices $\mathbf{1}_{\{X \geq k\}}$ valent 1 pour $k = 1, \ldots, j$ et 0 ensuite : leur somme vaut j. On prend l'espérance.

c) $L \geq k$ ($1 \leq k \leq n$) si et seulement si les $k-1$ premiers lancers ne donnent pas 6 : $\mathbb{P}(L \geq k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$. Donc

— $\mathbb{E}(L) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1-(5/6)^n}{1-5/6} = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$, qui tend vers 6 quand $n \to +\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$; $\mathbb{E}(L) = 6(1 - (\frac{5}{6})^n)$.

Correction de l'exercice 3 – Nombre moyen de points fixes

a) $F = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\sigma(i) = i\}}$ et $\mathbb{P}(\sigma(i) = i) = \frac{1}{n}$. Par linéarité :

$$\mathbb{E}(F) = n \times \frac{1}{n} = 1$$

— quel que soit n : en moyenne, une permutation au hasard a un point fixe.

b) Non ($\mathbb{P}(\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2) = \frac{1}{n(n-1)} \neq \frac{1}{n^2}$). Ce n'est pas gênant : la linéarité de l'espérance ne demande aucune indépendance.

c) $\frac{0 \times 9 + 1 \times 8 + 2 \times 6 + 3 \times 0 + 4 \times 1}{24} = \frac{24}{24} = 1$.

Réponse. $\mathbb{E}(F) = 1$ pour tout n.

Correction de l'exercice 4 – Nombre moyen de boîtes vides

a) $V = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{A_j}$ avec A_j : « la boîte j est vide », de probabilité $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ (chaque boule évite la boîte j). Par linéarité :

$$\mathbb{E}(V) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

b) $n = 3$: $3 \times \frac{8}{27} = \frac{8}{9}$; par la loi, $\frac{0 \times 6 + 1 \times 18 + 2 \times 3}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$.

c) $\frac{\mathbb{E}(V)}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \to \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$: environ 37 % des boîtes restent vides en moyenne.

Réponse. $\mathbb{E}(V) = n(1 - \frac{1}{n})^n$; $\frac{8}{9}$ pour $n = 3$; proportion $\to \mathrm{e}^{-1}$.

Correction de l'exercice 5 – Nombre moyen de records

a) $R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{i \text{ record}\}}$, donc

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n$$

b) $H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$; par la loi : $\frac{6 + 22 + 18 + 4}{24} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$.

c) $H_{100} \approx 5{,}19$: environ 5 records en 100 saisons (dont la première). Les records se raréfient, car $H_n \sim \ln n$ croît très lentement.

Réponse. $\mathbb{E}(R) = H_n$; $\frac{25}{12}$ pour $n = 4$; $\approx 5{,}2$ sur 100 saisons.

Correction de l'exercice 6 – Espérance de la loi hypergéométrique

a) Par symétrie, une boule donnée fait partie de l'échantillon avec probabilité $\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}$.

b) $X = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{A_i}$:

$$\mathbb{E}(X) = m \times \frac{n}{N} = n\frac{m}{N}$$

— (le calcul direct par la loi hypergéométrique est bien plus lourd).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Avec remise, $X \sim B\left(n, \frac{m}{N}\right)$ a la même espérance $n\frac{m}{N}$. La différence entre les deux modèles apparaîtra dans la variance.

Réponse. $\mathbb{P}(A_i) = \frac{n}{N}$; $\mathbb{E}(X) = \frac{nm}{N}$, comme avec remise.

Correction de l'exercice 7 – Anniversaires partagés

a) $C = \sum_{\{i,j\}} \mathbf{1}_{\{\text{anniversaires de } i \text{ et } j \text{ égaux}\}}$, somme sur les $\binom{n}{2}$ paires, chaque indicatrice ayant pour espérance $\frac{1}{365}$:

$$\mathbb{E}(C) = \frac{\binom{n}{2}}{365}$$

b) $n = 23$: $\frac{253}{365} \approx 0{,}69$. L'espérance est plus grande que $\mathbb{P}(C \geq 1)$: quand il y a des coïncidences, il y en a parfois plusieurs.

c) $\binom{n}{2} \geq 365 \Leftrightarrow n(n-1) \geq 730$: $n = 28$ ($28 \times 27 = 756$; $27 \times 26 = 702$).

Réponse. $\mathbb{E}(C) = \frac{\binom{n}{2}}{365}$; $\approx 0{,}69$ pour $n = 23$; $n \geq 28$.

Correction de l'exercice 8 – Somme et produit de dés

a) Par linéarité, $\mathbb{E}(S_n) = n \times \frac{7}{2} = 3{,}5n$.

b) Par indépendance :

$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{49}{4} = 12{,}25$$

— alors que $\mathbb{E}(X_1^2) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} \approx 15{,}17$: X_1 n'est pas indépendante d'elle-même.

c) Par indépendance mutuelle (et récurrence), $\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \left(\frac{7}{2}\right)^n$.

Réponse. $3{,}5n$; 12,25 contre $\frac{91}{6}$; $(\frac{7}{2})^n$.

Correction de l'exercice 9 – Première boule blanche : espérance du rang

a) Parmi la noire j et les b blanches, l'ordre de sortie est uniforme : la noire j est la première de ces $b+1$ boules avec probabilité $\frac{1}{b+1}$.

b) Les boules sorties avant la première blanche sont exactement les noires j réalisant B_j ; donc $T = 1 + \sum_j \mathbf{1}_{B_j}$, et avec $N - b$ noires :

$$\mathbb{E}(T) = 1 + \frac{N-b}{b+1} = \frac{N+1}{b+1}$$

c) $\frac{6}{3} = 2$; par la loi : $\frac{4+6+6+4}{10} = 2$.

Réponse. $\mathbb{P}(B_j) = \frac{1}{b+1}$; $\mathbb{E}(T) = \frac{N+1}{b+1}$; 2 pour $(5, 2)$.

Correction de l'exercice 10 – Nombre moyen de séries

a) Les lancers i et $i+1$ diffèrent si l'on a PF ou FP :

$$\mathbb{P}(C_i = 1) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Linéarité : $\mathbb{E}(R) = 1 + 2(n-1)p(1-p)$. Pour $p = \frac{1}{2}$: $\frac{n+1}{2}$.

c) $p(1-p)$ est maximal pour $p = \frac{1}{2}$: une pièce équilibrée produit le plus de séries en moyenne ; une pièce truquée produit de longues séries du résultat favori.

Réponse. $\mathbb{P}(C_i = 1) = 2p(1-p)$; $\mathbb{E}(R) = 1 + 2(n-1)p(1-p)$, maximale en $p = \frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 11 – Espérance et fonction génératrice

a) $G_X'(t) = \sum_k k\,\mathbb{P}(X=k)t^{k-1}$, donc $G_X'(1) = \mathbb{E}(X)$; de même $G_X''(1) = \sum_k k(k-1)\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}(X(X-1))$ (transfert).

b) $G'(t) = np(1-p+pt)^{n-1}$, d’où $G'(1) = np$.

c) $\frac{G_R'(t)}{G_R(t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+3}$; en $t=1$, $G_R(1) = 1$:

$$\mathbb{E}(R) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

Réponse. $\mathbb{E}(X) = G'(1)$; $B(n,p)$: np ; $\mathbb{E}(R) = \frac{25}{12}$.

Correction de l’exercice 12 – Nombre moyen de valeurs distinctes

a) $\overline{A_v}$: aucun des n dés ne donne v, de probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Donc $\mathbb{P}(A_v) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

b) Linéarité :

$$\mathbb{E}(N) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$$

c) $n=3$: $6 \times \frac{91}{216} = \frac{91}{36}$; par la loi, $\frac{6+180+360}{216} = \frac{546}{216} = \frac{91}{36}$.

d) $6\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \geq 5 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 6}{\ln 1{,}2} \approx 9{,}83$: 10 dés.

Réponse. $\mathbb{E}(N) = 6(1-(\frac{5}{6})^n)$; $\frac{91}{36}$ pour $n=3$; 10 dés.

Correction de l’exercice 13 – Positivité et croissance de l’espérance

a) $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X=x)$ est une somme de termes positifs ; elle est nulle si et seulement si chaque terme l’est, c’est-à-dire $\mathbb{P}(X=x) = 0$ pour tout $x > 0$.

b) $Y - X \geq 0$, donc $\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y-X) \geq 0$ par linéarité.

c) $\max(X,Y) \geq X$ et $\geq Y$: par croissance,

$$\mathbb{E}(\max(X,Y)) \geq \max(\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y))$$

— Deux dés indépendants : $\frac{161}{36} \approx 4{,}47 > 3{,}5$.

d) $-|X| \leq X \leq |X|$, et par croissance $-\mathbb{E}(|X|) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(|X|)$.

Réponse. Positivité et croissance ; $\mathbb{E}(\max) \geq \max(\mathbb{E})$; $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

Correction de l’exercice 14 – Une mise équitable

a) $\mathbb{P}(\text{somme } 7) = \frac{6}{36}$, $\mathbb{P}(\text{double}) = \frac{6}{36}$ (événements disjoints), et le reste a probabilité $\frac{24}{36}$:

$$\mathbb{P}(G=10) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(G=6) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(G=-m) = \frac{2}{3}$$

b) $\mathbb{E}(G) = \frac{10}{6} + \frac{6}{6} - \frac{2m}{3} = \frac{8}{3} - \frac{2m}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Équitable si $\mathbb{E}(G) = 0$, soit $m = 4$ €. Avec $m = 3$: $\mathbb{E}(G) = \frac{8-6}{3} = \frac{2}{3}$ € par partie en faveur du joueur ; l'organisateur **perd** en moyenne $\frac{2}{3} \times 1\,000 \approx 667$ € (il devrait fixer $m > 4$).

Réponse. $\mathbb{E}(G) = \frac{8-2m}{3}$; équitable pour $m = 4$; avec $m = 3$ l'organisateur perd ≈ 667 € sur 1 000 parties.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : collectionner des vignettes

a) Indicatrices : la vignette v est obtenue sauf si les m achats l'évitent, probabilité $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$. Linéarité :

$$D = \sum_{v=1}^{n} \mathbb{P}(v \text{ obtenue}) = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right)$$

b) $n = m = 50$: $D \approx 50 \times (1 - 0{,}364) = 31{,}8$ vignettes différentes en moyenne, donc environ 18,2 doublons.

c) $1 - 0{,}98^m \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}98^m \leq 0{,}1 \Leftrightarrow m \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}98} \approx 114$ achats.

d) Pour 90 % de la collection, il faut plus de deux fois plus d'achats que de vignettes ; les dernières sont les plus coûteuses (le temps moyen pour tout compléter est de l'ordre de $n \ln n$, soit environ 225 pour $n = 50$).

Réponse. $D = n(1 - (1 - \frac{1}{n})^m)$; $\approx 31{,}8$ différentes pour 50 achats ; ≈ 114 achats pour 90 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).