Plaquette 1 – Linéarité, König-Huygens, covariance et inégalités de concentration

Espérance et variance — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Espérance.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x) \qquad \mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x} g(x)\mathbb{P}(X = x) \text{ (transfert)}$$

— **Linéarité** : $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c$ — **sans aucune hypothèse d'indépendance**.
— **Positivité** : $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$; $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
— **Indicatrice** : si $\mathbf{1}_A$ vaut 1 sur A et 0 ailleurs, alors $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Variance.

$$\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))^2\Big] \overset{\text{König-Huygens}}{=} \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

— $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$ — la variance **ignore** la translation et est **quadratique** en a.
— **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.
— $\mathrm{V}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est **presque sûrement constante**.

Covariance.

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathrm{V}(X + Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

— Si X et Y sont **indépendantes** : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, donc Cov = 0 et les variances s'**additionnent**. La réciproque est **fausse**.

Inégalités.

— **Markov** : pour $X \geq 0$ et $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$.
— **Bienaymé-Tchebychev** : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

Valeurs usuelles : $B(p)$: p et $p(1-p)$ · $B(n,p)$: np et $np(1-p)$ · uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$: $\dfrac{n+1}{2}$ et $\dfrac{n^2-1}{12}$.

Correction de l'exercice 1 – Espérance et variance d'un dé

— **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1 + 2 + \ldots + 6}{6} = \dfrac{21}{6} = 3{,}5$.
— **Moment d'ordre 2** : $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \dfrac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \dfrac{91}{6} \approx 15{,}167$.
— **König-Huygens** : $\mathrm{V}(X) = \dfrac{91}{6} - 3{,}5^2 = 15{,}1667 - 12{,}25 = \dfrac{35}{12} \approx 2{,}917$.
— **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{2{,}917} \approx 1{,}708$.
— **Contrôle par la formule de la loi uniforme** : $\dfrac{n+1}{2} = 3{,}5$ ✓ et $\dfrac{n^2-1}{12} = \dfrac{35}{12}$ ✓
— **Lecture** : l'écart type d'environ 1,7 indique qu'un résultat typique s'écarte de 1 à 2 points de la moyenne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. 3,5 ; $\frac{35}{12} \approx 2{,}92$; $\sigma \approx 1{,}71$.

Correction de l'exercice 2 – Linéarité

— **Espérance** (linéarité, sans hypothèse) :

$$\mathbb{E}(3X - 2Y + 1) = 3 \times 2 - 2 \times 5 + 1 = 6 - 10 + 1 = -3$$

— **Variance** : la constante disparaît, les coefficients sont **élevés au carré**, et l'indépendance annule la covariance :

$$\mathrm{V}(3X - 2Y + 1) = 9\mathrm{V}(X) + 4\mathrm{V}(Y) = 9 + 16 = 25$$

— **Écart type** : $\sigma = 5$.

— **Double piège** : ne pas écrire $\mathrm{V}(3X) = 3\mathrm{V}(X)$, et ne pas **soustraire** les variances à cause du signe -2 — une variance est toujours positive, elle s'ajoute.

Réponse. $\mathbb{E} = -3$ et $\mathrm{V} = 25$.

Correction de l'exercice 3 – Espérance par les indicatrices

On écrit X comme **somme d'indicatrices** : $X = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, où A_i vaut 1 si le i-ième as est dans la main.

— Chaque as a la même probabilité d'être tiré : $\mathbb{P}(A_i = 1) = \frac{5}{32}$ (il y a 5 places pour 32 cartes).

— Donc $\mathbb{E}(A_i) = \frac{5}{32}$.

— **Linéarité** (valable **même si les A_i ne sont pas indépendantes**) :

$$\mathbb{E}(X) = 4 \times \frac{5}{32} = \frac{20}{32} = 0{,}625$$

— **Contrôle** : la proportion d'as dans le jeu est $\frac{4}{32} = 12{,}5\ \%$, et $5 \times 0{,}125 = 0{,}625$ ✓

— **Force de la méthode** : la loi hypergéométrique de X est lourde à écrire, mais la décomposition en indicatrices donne l'espérance en trois lignes.

Réponse. $\mathbb{E}(X) = 0{,}625$.

Correction de l'exercice 4 – König-Huygens

— **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = 1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}2 = 0{,}5 + 0{,}6 + 1 = 2{,}1$.

— **Moment d'ordre 2** : $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 1 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}3 + 25 \times 0{,}2 = 0{,}5 + 1{,}2 + 5 = 6{,}7$.

— **König-Huygens** : $\mathrm{V}(X) = 6{,}7 - 2{,}1^2 = 6{,}7 - 4{,}41 = 2{,}29$.

— **Écart type** : $\sigma \approx 1{,}513$.

— **Contrôle par la définition** :
$0{,}5(1 - 2{,}1)^2 + 0{,}3(2 - 2{,}1)^2 + 0{,}2(5 - 2{,}1)^2 = 0{,}605 + 0{,}003 + 1{,}682 = 2{,}29$ ✓

— **Conseil pratique** : König-Huygens est presque toujours plus rapide que la définition, car il évite de soustraire la moyenne dans chaque terme.

Réponse. $\mathbb{E}(X) = 2{,}1$ et $\mathrm{V}(X) = 2{,}29$.

Correction de l'exercice 5 – Espérance de la loi binomiale

Méthode des indicatrices (la plus simple).

— X compte les succès de n épreuves indépendantes : $X = X_1 + \ldots + X_n$ avec $X_i \sim B(p)$.

— $\mathbb{E}(X_i) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Par **linéarité** : $\mathbb{E}(X) = np$.

Méthode directe (pour l'entraînement au calcul) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}$$

— On factorise np et on pose $j = k-1$: $np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j q^{n-1-j} = np(p+q)^{n-1} = np$.

— **Variance** : de même, $\mathrm{V}(X) = \sum_i \mathrm{V}(X_i) = np(1-p)$, les X_i étant **indépendantes**.

— **Contrôle** avec $n = 10$, $p = 0{,}3$: $\mathbb{E} = 3$ et $\mathrm{V} = 2{,}1$.

Réponse. $X = \sum X_i$ avec $X_i \sim B(p)$, puis linéarité.

Correction de l'exercice 6 – Covariance

Écrivons $S = D + D'$ où D' est le second dé, **indépendant** de D.

— **Bilinéarité de la covariance** :

$$\mathrm{Cov}(S, D) = \mathrm{Cov}(D, D) + \mathrm{Cov}(D', D) = \mathrm{V}(D) + 0$$

— Or $\mathrm{V}(D) = \dfrac{35}{12} \approx 2{,}917$.

— **Conclusion** : $\mathrm{Cov}(S, D) = \dfrac{35}{12}$.

— **Coefficient de corrélation** : $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}}{\sigma_S \sigma_D}$ avec $\mathrm{V}(S) = \dfrac{70}{12}$, donc

$$\rho = \frac{35/12}{\sqrt{70/12}\sqrt{35/12}} = \sqrt{\frac{35}{70}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$$

— **Lecture** : la corrélation est forte mais pas totale — le premier dé explique **la moitié** de la variance de la somme.

Réponse. $\mathrm{Cov}(S, D) = \dfrac{35}{12}$, corrélation $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 7 – Covariance nulle sans indépendance

— **Espérances** : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{-1+0+1}{3} = 0$; $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1+0+1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

— **Produit** : $XY = X^3 = X$ (car $X \in \{-1, 0, 1\}$), donc $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) = 0$.

— **Covariance** : $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 - 0 \times \dfrac{2}{3} = 0$.

— **Indépendance ?** $\mathbb{P}(X = 0,\ Y = 0) = \dfrac{1}{3}$, alors que $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$.

— $\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{9}$: les variables ne sont **pas indépendantes** — Y est même une **fonction déterministe** de X !

— **Morale** : la covariance ne mesure que la dépendance **linéaire**. Ici le lien est quadratique, donc invisible pour elle.

Réponse. Cov = 0 mais $Y = X^2$: dépendance non linéaire.

Correction de l'exercice 8 – Variance d'une somme

Les résultats $X_1, \ldots, X_n$ sont **indépendants** et de même loi.

— $\mathbb{E}(S_n) = n \times 3{,}5 = 3{,}5n$.

— $\mathrm{V}(S_n) = n \times \dfrac{35}{12} \approx 2{,}917n$ (les covariances sont nulles).

— $\sigma(S_n) = 1{,}708\sqrt{n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Écart type relatif** : $\dfrac{1{,}708\sqrt{n}}{3{,}5n} = \dfrac{0{,}488}{\sqrt{n}}$.

— **Conclusion** : la dispersion **relative** décroît en $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ — pour $n = 100$, elle n'est plus que de 4,9 %.

— **Portée** : c'est le mécanisme de la **loi des grands nombres** — la moyenne empirique se concentre autour de l'espérance à vitesse $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Réponse. $3{,}5n$; $\dfrac{35n}{12}$; écart relatif $\dfrac{0{,}488}{\sqrt{n}}$.

Correction de l'exercice 9 – Inégalité de Markov

Markov s'applique car la variable est **positive**.

$$\mathbb{P}(X \geq 10) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{10} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

— **Conclusion** : au plus 20 % de chance d'atteindre 10 pannes.

— **Force et faiblesse** : la majoration ne suppose **rien** sur la loi — c'est sa force ; mais elle est en général très **grossière** (pour une loi de Poisson de paramètre 2, la vraie probabilité vaut environ 0,00005).

— **Rappel** : Markov exige $X \geq 0$. Pour une variable de signe quelconque, on l'applique à $|X|$ ou à $(X - \mathbb{E}X)^2$ — ce qui donne précisément Bienaymé-Tchebychev.

Réponse. $\mathbb{P}(X \geq 10) \leq 0{,}2$.

Correction de l'exercice 10 – Bienaymé-Tchebychev

— **Paramètres** : $\mathbb{E}(X) = 50$ et $\mathrm{V}(X) = 100 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 25$.

— **Bienaymé-Tchebychev** avec $\varepsilon = 20$:

$$\mathbb{P}(|X - 50| \geq 20) \leq \frac{25}{400} = 0{,}0625$$

— **Conclusion** : au plus 6,25 %.

— **Comparaison avec la vraie valeur** : elle vaut environ 6×10^{-5} — la majoration est **très** pessimiste, mais elle est universelle et ne demande aucun calcul de loi.

— **Usage typique** : Tchebychev sert à démontrer des convergences (loi faible des grands nombres), pas à obtenir des valeurs numériques précises.

Réponse. $\leq 0{,}0625$.

Correction de l'exercice 11 – Loi des grands nombres

— $F_n = \dfrac{X}{n}$ avec $X \sim B(n\,;0{,}5)$, donc $\mathbb{E}(F_n) = 0{,}5$ et

$$\mathrm{V}(F_n) = \frac{\mathrm{V}(X)}{n^2} = \frac{n \times 0{,}25}{n^2} = \frac{0{,}25}{n}$$

— **Tchebychev** avec $\varepsilon = 0{,}01$:

$$\mathbb{P}(|F_n - 0{,}5| \geq 0{,}01) \leq \frac{0{,}25\,/\,n}{0{,}0001} = \frac{2\,500}{n}$$

— On veut $\dfrac{2500}{n} \leq 0{,}05$, soit $n \geq 50\,000$.

— **Conclusion** : 50 000 lancers suffisent à garantir la précision demandée.

— **Mise en perspective** : le théorème central limite montre que $n \approx 9\,600$ suffirait en réalité. Tchebychev donne une garantie **sûre mais coûteuse**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $n \geq 50\,000$.

Correction de l'exercice 12 – Loi uniforme sur un intervalle d'entiers

a) $x \mapsto x - a + 1$ est une bijection de $[\![a, b]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$: chaque valeur de Y a probabilité $\frac{1}{n}$.

b) Par linéarité et invariance de la variance par translation :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) + a - 1 = \frac{n+1}{2} + a - 1 = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(Y) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

c) $n = 11$: $\mathbb{E}(X) = 15$, $\mathrm{V}(X) = \frac{120}{12} = 10$, écart type $\sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Réponse. $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$; c) 15 et 10.

Correction de l'exercice 13 – Transfert : l'espérance de 1/(X + 1)

a) Transfert :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

b) Avec l'identité donnée et $j = k + 1$:

— $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} p^k q^{n-k} = \frac{1}{(n+1)p} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^j q^{n+1-j} = \frac{(p+q)^{n+1} - q^{n+1}}{(n+1)p}$.

— Comme $p + q = 1$: $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1 - q^{n+1}}{(n+1)p}$.

c) $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$: $\frac{1 - \frac{1}{8}}{3 \times \frac{1}{2}} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583$, alors que $\frac{1}{\mathbb{E}(X)+1} = \frac{1}{2}$. En général $\mathbb{E}(f(X)) \neq f(\mathbb{E}(X))$ (ici f est convexe et l'espérance de $f(X)$ est plus grande).

Réponse. $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1 - q^{n+1}}{(n+1)p}$; $\frac{7}{12} \neq \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Variance d'une variable de Bernoulli

a) $\mathbb{E}(X) = p$, et $X^2 = X$ (car $X \in \{0, 1\}$), donc $\mathbb{E}(X^2) = p$. König-Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

b) $p \mapsto p(1-p)$ est maximale en $p = \frac{1}{2}$, de maximum $\frac{1}{4}$ (sommet de la parabole).

c) Une variable à valeurs dans $\{0, 1\}$ est de Bernoulli : variance $\leq \frac{1}{4}$. Si $X \in [0, 1]$, alors $X^2 \leq X$, donc $\mathbb{E}(X^2) \leq \mathbb{E}(X) = m$ et $\mathrm{V}(X) \leq m - m^2 \leq \frac{1}{4}$.

Réponse. $\mathrm{V}(X) = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, maximale en $p = \frac{1}{2}$; vrai aussi pour $X \in [0, 1]$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : jeu et espérance de gain

a) Soit G le **gain net** (gain brut moins la mise).

— $G = 7$ avec probabilité $\frac{1}{6}$; $G = -1$ avec probabilité $\frac{2}{6}$; $G = -3$ avec probabilité $\frac{3}{6}$.

$$\mathbb{E}(G) = \frac{7 - 2 - 9}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \approx -0{,}67 \text{ €}$$

— **Conclusion** : le jeu est **défavorable** au joueur ; il perd en moyenne 0,67 € par partie. Sur 100 parties, la perte moyenne est d'environ 67 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) **Moment d'ordre 2** : $\mathbb{E}\left(G^2\right) = \dfrac{49 + 2 \times 1 + 3 \times 9}{6} = \dfrac{49 + 2 + 27}{6} = \dfrac{78}{6} = 13$.

— **König-Huygens** : $\mathrm{V}(G) = 13 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 13 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{113}{9} \approx 12{,}556$.

— **Écart type** : $\sigma(G) = \sqrt{12{,}556} \approx 3{,}54$ €.

— **Lecture** : la perte moyenne est faible devant l'écart type — d'où l'illusion du joueur, qui perçoit surtout les fluctuations. C'est précisément sur ce contraste que reposent les jeux d'argent.

Réponse. a) $\mathbb{E}(G) = -\dfrac{2}{3}$ € (jeu défavorable) · b) $\sigma \approx 3{,}54$ €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).