Plaquette 5 – L'espérance pour décider : jeux, stratégies, algorithmes

Espérance et variance — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

L'espérance est l'outil de **décision** par excellence : entre plusieurs stratégies, on choisit celle qui maximise le gain moyen (ou minimise le coût moyen). On calcule l'espérance de chaque option, souvent en **conditionnant** sur la première étape (formule des probabilités totales pour l'espérance), en raisonnant **à rebours** pour les décisions en plusieurs étapes, ou par **linéarité** sur des indicatrices pour les coûts d'algorithmes. On garde en tête les limites du critère : une espérance ne dit rien du risque (variance), ni des événements rares mais catastrophiques.

Exercice 1 – Relancer ou s'arrêter ?

On lance un dé ; on peut garder le résultat ou relancer (le second résultat est alors définitif). Le gain est le résultat gardé.

a) Quelle est l'espérance de gain si l'on garde toujours le premier lancer ?

b) On garde le premier lancer s'il est $\geq s$. Calculer l'espérance de gain en fonction du seuil s, et trouver le meilleur seuil.

c) Avec **trois** lancers possibles, déterminer la stratégie optimale et son espérance (raisonner à rebours).

Exercice 2 – Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

On lance une pièce équilibrée au plus n fois. Si le premier Pile apparaît au lancer k, on gagne 2^k € ; s'il n'y a aucun Pile, on ne gagne rien.

a) Calculer l'espérance de gain.

b) Quelle mise rend le jeu équitable ? Que se passe-t-il quand $n \to +\infty$?

c) Pour $n = 20$, quelle est la probabilité de gagner plus de 1 000 € ? Commenter l'écart entre l'espérance et ce qu'on gagne « typiquement ».

Exercice 3 – Coût moyen d'une recherche séquentielle

Un élément cherché se trouve dans un tableau de n cases, à une position uniforme. On parcourt le tableau depuis le début jusqu'à le trouver.

a) Quel est le nombre moyen de comparaisons ?

b) L'élément est absent avec probabilité q (sinon, position uniforme). Quel est le nombre moyen de comparaisons (une recherche infructueuse en coûte n) ?

c) Si les positions ne sont plus uniformes mais $\mathbb{P}(\text{position } k) \propto \frac{1}{k}$ (loi de Zipf), faut-il trier le tableau par popularité décroissante ? Calculer le coût moyen pour $n = 4$.

Exercice 4 – Comparaisons dans le tri rapide

Le tri rapide choisit un pivot uniformément au hasard, le compare aux $n - 1$ autres éléments, puis trie récursivement les deux sous-tableaux. On note C_n le nombre

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

moyen de comparaisons ($C_0 = C_1 = 0$).

a) Calculer C_2 et C_3 directement.

b) En conditionnant par le rang du pivot, montrer que $C_n = n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k$.

c) Calculer C_4 et vérifier la formule $C_n = 2(n+1)H_n - 4n$ pour $n = 3$ et $n = 4$.

Exercice 5 – Le jeu du Chuck-a-luck

On mise 1 € sur un numéro de 1 à 6, puis on lance trois dés. Si le numéro sort sur $k \geq 1$ dés, on gagne k € (et l'on récupère sa mise) ; s'il ne sort pas, on perd la mise.

a) Loi du nombre K de dés montrant le numéro ; loi du gain G.

b) Calculer $\mathbb{E}(G)$. Le jeu est-il équitable ?

c) Expliquer l'erreur de raisonnement « chaque dé donne une chance sur six, donc trois dés donnent une chance sur deux de gagner ».

Exercice 6 – Le problème du marchand de journaux

Un kiosque achète q journaux à 1 € et les revend 3 € ; les invendus sont perdus. La demande D est uniforme sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) Exprimer le bénéfice $B_q = 3\min(D, q) - q$.

b) Montrer que $\mathbb{E}(\min(D, q)) = \sum_{k=1}^{q} \mathbb{P}(D \geq k)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(B_q)$ pour $q = 0, \ldots, 4$ et en déduire la commande optimale.

d) Généraliser : on commande tant que $\mathbb{P}(D \geq q+1) \geq \frac{1}{3}$. Pourquoi $\frac{1}{3}$?

Exercice 7 – Collisions dans une table de hachage

On range n clés dans une table de m cases (uniformément, indépendamment). Une **collision** est une paire de clés tombant dans la même case.

a) Montrer que le nombre moyen de collisions est $\dfrac{\binom{n}{2}}{m}$.

b) Quelle taille de table choisir pour $n = 1\,000$ clés si l'on veut au plus 5 collisions en moyenne ?

c) Le coût moyen d'une recherche est $1 + \frac{n-1}{m}$ (la case de la clé contient en moyenne $\frac{n-1}{m}$ autres clés). Le justifier par linéarité.

Exercice 8 – Distance moyenne d'une marche aléatoire

Un pion part de 0 et fait n pas indépendants de ± 1 équiprobables ; S_n est sa position.

a) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{E}(S_n^2)$.

b) Calculer $\mathbb{E}(|S_4|)$ à partir de la loi de S_4.

c) Montrer que $\mathbb{E}(|S_n|) \leq \sqrt{n}$. Interpréter.

Exercice 9 – Espérance par conditionnement : un dé choisi au hasard

On choisit au hasard (probabilité $\frac{1}{2}$ chacun) un dé à 4 faces ou un dé à 6 faces, puis on le lance. X est le résultat.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ par conditionnement.

b) Déterminer la loi de X et retrouver $\mathbb{E}(X)$.

c) Calculer $\mathrm{V}(X)$ et comparer avec la moyenne des variances conditionnelles. Commenter.

Exercice 10 – L'espérance de l'inverse

Soit X une variable finie à valeurs strictement positives.

a) Montrer, par Cauchy-Schwarz ($\mathbb{E}(UV)^2 \leq \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2)$) appliquée à $U = \sqrt{X}$ et $V = \frac{1}{\sqrt{X}}$, que $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq 1$.

b) Application : un trajet de 10 km est parcouru à une vitesse V égale à 10 ou 30 km/h avec probabilité $\frac{1}{2}$. Comparer la durée moyenne et $\frac{10}{\mathbb{E}(V)}$.

c) Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 11 – Algorithme de Las Vegas

Un algorithme aléatoire réussit chaque essai avec probabilité p (indépendamment) et coûte c secondes par essai. On l'exécute jusqu'au succès, au plus n fois.

a) Soit N le nombre d'essais. Montrer que $\mathbb{E}(N) = \frac{1-(1-p)^n}{p}$.

b) Quelle est la probabilité d'échec final ?

c) Application : $p = 0{,}2$, $c = 1$ s. Comparer $n = 10$ et $n = 30$ (temps moyen et échec).

Exercice 12 – Une loterie

Une loterie vend 1 000 billets à 5 € ; elle distribue un lot de 1 000 €, 5 lots de 200 € et 20 lots de 25 €.

a) Loi du gain net G d'un billet (gain moins prix).

b) Espérance et écart type de G.

c) Quelle part des recettes est redistribuée ? Pourquoi des joueurs achètent-ils quand même des billets ?

Exercice 13 – Parier sur une martingale

Un joueur mise 1 € sur « rouge » (probabilité $p = \frac{18}{37}$ de gagner, gain égal à la mise). S'il perd, il double sa mise ; il s'arrête dès qu'il gagne, ou après n coups perdus.

a) Montrer que s'il gagne au coup $k \leq n$, son gain total est +1 €.

b) Quelle est sa perte s'il perd les n coups ?

c) Calculer l'espérance du gain pour $n = 10$. La martingale permet-elle de battre le casino ?

Exercice 14 – Espérance et médiane

Dans une entreprise de 10 salariés, neuf gagnent 2 000 € et le dirigeant 20 000 €. On tire un salarié au hasard ; X est son salaire.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et une médiane M ($\mathbb{P}(X \leq M) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \geq M) \geq \frac{1}{2}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que $a \mapsto \mathbb{E}(|X-a|)$ est minimale en $a = M$, alors que $\mathbb{E}((X-a)^2)$ l'est en $a = \mathbb{E}(X)$ (calculer les deux fonctions en $a = 2\,000$ et $a = 3\,800$).

c) Quel indicateur résume le mieux le salaire « typique » ?

Exercice 15 – Synthèse : les tests groupés de Dorfman

Pour dépister une infection de prévalence p dans une grande population, on mélange les prélèvements par groupes de k personnes : on teste le mélange ; s'il est négatif, les k personnes sont saines (1 test) ; sinon, on les teste individuellement ($1 + k$ tests). Les statuts sont indépendants.

a) Soit T le nombre de tests pour un groupe. Déterminer $\mathbb{E}(T)$.

b) En déduire le nombre moyen de tests par personne : $f(k) = \frac{1}{k} + 1 - (1-p)^k$.

c) Pour $p = 0{,}01$, calculer $f(5)$, $f(10)$, $f(11)$ et comparer au dépistage individuel.

d) Pour quelles prévalences la méthode cesse-t-elle d'être intéressante ? (Étudier $f(2) < 1$.)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).