Plaquette 2 – Calculer une espérance : transfert, linéarité, indicatrices

Espérance et variance — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Trois méthodes, de la plus directe à la plus puissante. Le **calcul à partir de la loi** (ou du théorème de transfert pour $\mathbb{E}(f(X))$) marche quand la loi est simple. La formule $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$ est idéale pour les maximums, minimums et temps d'attente. Enfin, la **linéarité** appliquée à une décomposition en **indicatrices** $X = \sum \mathbf{1}_{A_i}$ donne $\mathbb{E}(X) = \sum \mathbb{P}(A_i)$, **sans connaître la loi** de X et même si les A_i sont dépendants : c'est la méthode reine pour les variables de comptage.

Exercice 1 – Espérance du maximum de deux dés

Soit M le maximum de deux dés équilibrés indépendants.

a) Rappeler $\mathbb{P}(M = k) = \frac{2k-1}{36}$ et calculer $\mathbb{E}(M)$.

b) Retrouver le résultat avec $\mathbb{E}(M) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(M \geq k)$.

c) En déduire l'espérance du minimum m (utiliser $M + m = D_1 + D_2$).

Exercice 2 – Espérance par la queue de la loi

Soit X une variable à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}(X = j)$, puis intervertir les sommes pour obtenir $\mathbb{E}(X)$.

b) Autre preuve : écrire $X = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X \geq k\}}$ et appliquer la linéarité.

c) Application : on lance un dé au plus n fois, en s'arrêtant au premier 6 ; L est le nombre de lancers. Montrer que $\mathbb{E}(L) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$.

Exercice 3 – Nombre moyen de points fixes

Soit σ une permutation uniforme de $[\![1, n]\!]$ et F son nombre de points fixes.

a) Écrire F comme somme d'indicatrices et en déduire $\mathbb{E}(F)$.

b) Les indicatrices sont-elles indépendantes ? Est-ce gênant ?

c) Vérifier pour $n = 4$ avec la loi $\frac{9}{24}, \frac{8}{24}, \frac{6}{24}, 0, \frac{1}{24}$.

Exercice 4 – Nombre moyen de boîtes vides

On lance n boules au hasard dans n boîtes (uniformément, indépendamment). V est le nombre de boîtes vides.

a) Montrer que $\mathbb{E}(V) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

b) Vérifier pour $n = 3$ avec la loi $\frac{6}{27}, \frac{18}{27}, \frac{3}{27}$.

c) Donner un équivalent de la proportion moyenne de boîtes vides quand $n \to +\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Nombre moyen de records

Dans une permutation uniforme de n valeurs distinctes, la position i est un record avec probabilité $\frac{1}{i}$.

a) En déduire l'espérance du nombre R de records.

b) Calculer pour $n = 4$ et vérifier avec la loi $\frac{6}{24}, \frac{11}{24}, \frac{6}{24}, \frac{1}{24}$.

c) Un athlète bat son record en moyenne combien de fois sur 100 saisons, si ses performances sont « au hasard » ? (On donne $H_{100} \approx 5{,}19$.)

Exercice 6 – Espérance de la loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont m blanches ; on en tire n sans remise. X est le nombre de blanches tirées.

a) Numérotons les blanches $1, \dots, m$ et notons A_i : « la blanche i est tirée ». Calculer $\mathbb{P}(A_i)$.

b) En déduire $\mathbb{E}(X) = n\frac{m}{N}$.

c) Comparer avec le tirage avec remise.

Exercice 7 – Anniversaires partagés

Dans un groupe de n personnes (anniversaires uniformes sur 365 jours, indépendants), on note C le nombre de **paires** de personnes ayant le même anniversaire.

a) Montrer que $\mathbb{E}(C) = \dfrac{\binom{n}{2}}{365}$.

b) Pour $n = 23$, calculer $\mathbb{E}(C)$ et le comparer à $\mathbb{P}(C \geq 1) \approx 0{,}507$.

c) Pour quelle valeur de n a-t-on $\mathbb{E}(C) \geq 1$?

Exercice 8 – Somme et produit de dés

On lance n dés équilibrés indépendants de résultats $X_1, \dots, X_n$.

a) Calculer l'espérance de la somme S_n.

b) Calculer l'espérance du produit de deux dés $X_1 X_2$, et comparer à $\mathbb{E}(X_1^2)$.

c) Calculer l'espérance du produit $X_1 X_2 \cdots X_n$.

Exercice 9 – Première boule blanche : espérance du rang

Une urne contient N boules dont b blanches ; on tire sans remise. T est le rang de la première blanche.

a) Pour chaque boule noire j, on note B_j : « la noire j sort avant toutes les blanches ». Montrer que $\mathbb{P}(B_j) = \frac{1}{b+1}$.

b) En écrivant $T = 1 + \sum_j \mathbf{1}_{B_j}$, montrer que $\mathbb{E}(T) = \frac{N+1}{b+1}$.

c) Vérifier pour $N = 5$, $b = 2$ (loi $\frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Nombre moyen de séries

On lance n fois une pièce qui donne Pile avec probabilité p. R est le nombre de séries (blocs maximaux de résultats identiques).

a) Écrire $R = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_i$ avec C_i : « les lancers i et $i+1$ diffèrent ». Calculer $\mathbb{P}(C_i = 1)$.

b) En déduire $\mathbb{E}(R)$.

c) Pour quelle valeur de p l'espérance est-elle maximale ?

Exercice 11 – Espérance et fonction génératrice

Pour X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, $G_X(t) = \sum_k \mathbb{P}(X = k) t^k$.

a) Montrer que $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ et $\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$.

b) Retrouver l'espérance de $B(n, p)$ à partir de $G(t) = (1 - p + pt)^n$.

c) Calculer l'espérance du nombre de records pour $n = 4$ à partir de $G_R(t) = \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{24}$ (dérivée logarithmique).

Exercice 12 – Nombre moyen de valeurs distinctes

On lance n dés équilibrés ; N est le nombre de valeurs distinctes obtenues.

a) Écrire $N = \sum_{v=1}^{6} \mathbf{1}_{A_v}$ avec A_v : « la valeur v apparaît ». Calculer $\mathbb{P}(A_v)$.

b) En déduire $\mathbb{E}(N) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$.

c) Vérifier pour $n = 3$ avec la loi $\frac{6}{216}, \frac{90}{216}, \frac{120}{216}$.

d) Combien de dés faut-il lancer pour voir en moyenne au moins 5 valeurs distinctes ?

Exercice 13 – Positivité et croissance de l'espérance

a) Montrer que si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

b) En déduire que $X \leq Y$ entraîne $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

c) Application : montrer que $\mathbb{E}(\max(X, Y)) \geq \max(\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y))$, et donner un cas d'inégalité stricte.

d) Montrer que $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

Exercice 14 – Une mise équitable

On lance deux dés. Si la somme vaut 7, on gagne 10 € ; si c'est un double, on gagne 6 € ; sinon on perd la mise m.

a) Déterminer la loi du gain G en fonction de m (un double ne peut pas faire 7).

b) Calculer $\mathbb{E}(G)$.

c) Pour quelle mise le jeu est-il équitable ? L'organisateur fixe $m = 3$ € : quel est son bénéfice moyen sur 1 000 parties ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : collectionner des vignettes

Il existe n vignettes différentes, chaque achat en donnant une uniformément au hasard, indépendamment. On achète m vignettes.

a) Montrer que le nombre moyen de vignettes **différentes** obtenues est $D = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right)$.

b) Le nombre moyen de **doublons** (achats qui ne donnent pas de nouvelle vignette) est $m - D$. Calculer pour $n = 50$ et $m = 50$ (on donne $0{,}98^{50} \approx 0{,}364$).

c) Combien d'achats faut-il pour obtenir en moyenne 90 % de la collection de 50 vignettes ? (On donne $\ln 0{,}1 \approx -2{,}303$ et $\ln 0{,}98 \approx -0{,}0202$.)

d) Commenter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).