Plaquette 1 – Linéarité, König-Huygens, covariance et inégalités de concentration

Espérance et variance — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On calcule une espérance par la définition ou par **linéarité** (décomposition en indicatrices), une variance par **König-Huygens**, on manipule la **covariance** pour une somme, et on majore un écart par **Markov** ou **Bienaymé-Tchebychev**.

Exercice 1 – Espérance et variance d'un dé

Soit X le résultat d'un dé équilibré à 6 faces. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 2 – Linéarité

Soient X et Y avec $\mathbb{E}(X) = 2$, $\mathbb{E}(Y) = 5$, $\mathrm{V}(X) = 1$, $\mathrm{V}(Y) = 4$, X et Y indépendantes.

Calculer $\mathbb{E}(3X - 2Y + 1)$ et $\mathrm{V}(3X - 2Y + 1)$.

Exercice 3 – Espérance par les indicatrices

On tire 5 cartes dans un jeu de 32. Soit X le nombre d'as obtenus. Calculer $\mathbb{E}(X)$ **sans** déterminer la loi de X.

Exercice 4 – König-Huygens

Soit X de loi $\mathbb{P}(X = 1) = 0{,}5$, $\mathbb{P}(X = 2) = 0{,}3$, $\mathbb{P}(X = 5) = 0{,}2$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 5 – Espérance de la loi binomiale

Démontrer que si $X \sim B(n, p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Exercice 6 – Covariance

On lance deux dés ; soient S la somme et D le résultat du premier dé. Calculer $\mathrm{Cov}(S, D)$.

Exercice 7 – Covariance nulle sans indépendance

Soit X uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = X^2$. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ alors que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 8 – Variance d'une somme

On lance n dés équilibrés et on note S_n la somme. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{V}(S_n)$, puis l'écart type relatif $\dfrac{\sigma(S_n)}{\mathbb{E}(S_n)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Inégalité de Markov

Le nombre quotidien de pannes d'un serveur est une variable positive d'espérance 2. Majorer la probabilité d'observer au moins 10 pannes en un jour.

Exercice 10 – Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \sim B(100\,;0{,}5)$. Majorer $\mathbb{P}(|X-50| \geq 20)$.

Exercice 11 – Loi des grands nombres

On lance n fois une pièce équilibrée et on note F_n la fréquence de piles. Combien de lancers garantissent $\mathbb{P}(|F_n - 0{,}5| \geq 0{,}01) \leq 0{,}05$?

Exercice 12 – Loi uniforme sur un intervalle d'entiers

Soit X uniforme sur $[\![a, b]\!]$ ($a \leq b$ entiers), et $n = b - a + 1$.

a) Montrer que $Y = X - a + 1$ est uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

b) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à partir des résultats pour $[\![1, n]\!]$.

c) Application : X uniforme sur $[\![10, 20]\!]$.

Exercice 13 – Transfert : l'espérance de 1/(X + 1)

Soit $X \sim B(n, p)$ avec $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$.

a) Écrire $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ à l'aide du théorème de transfert.

b) Utiliser $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ pour montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-q^{n+1}}{(n+1)p}$.

c) Comparer avec $\frac{1}{\mathbb{E}(X)+1}$ pour $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 14 – Variance d'une variable de Bernoulli

Soit $X \sim B(p)$.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathrm{V}(X)$.

b) Pour quelle valeur de p la variance est-elle maximale ? Quelle est la valeur maximale ?

c) En déduire que toute variable à valeurs dans $\{0, 1\}$ a une variance au plus $\frac{1}{4}$, puis que toute variable à valeurs dans $[0, 1]$ vérifie aussi $\mathrm{V}(X) \leq \frac{1}{4}$ (utiliser $X^2 \leq X$).

Exercice 15 – Synthèse : jeu et espérance de gain

Un jeu coûte 3 € la partie. On lance un dé : on gagne 10 € si l'on fait 6, 2 € si l'on fait 4 ou 5, rien sinon.

a) Calculer l'espérance de gain net et conclure.

b) Calculer l'écart type du gain net.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).