Plaquette 4 – Inégalités de concentration et loi faible des grands nombres

Espérance et variance — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Quand la loi exacte est inaccessible ou trop lourde, on **majore** la probabilité d'un écart à l'aide de quelques moments. **Markov** n'utilise que l'espérance d'une variable positive ; **Bienaymé-Tchebychev**, appliqué à $(X-\mathbb{E}X)^2$, utilise la variance et contrôle l'écart à la moyenne. Appliqué à la moyenne de n variables indépendantes de même loi, il donne la **loi faible des grands nombres** : l'écart entre moyenne empirique et espérance devient improbable, avec une probabilité en $\frac{1}{n}$. Ces bornes sont grossières mais universelles ; on les utilise pour dimensionner un échantillon, un stock, une réserve.

Exercice 1 – L'inégalité de Markov en pratique

Dans une entreprise, le salaire moyen est de 2 500 € par mois.

a) Démontrer l'inégalité de Markov pour une variable finie positive (partir de $X \geq a\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}$).

b) Majorer la proportion de salariés gagnant au moins 10 000 €.

c) La borne peut-elle être atteinte ? Construire une répartition de salaires (positifs) de moyenne 2 500 réalisant l'égalité.

d) Que devient la borne pour $a = 2\,000$ € ? Commenter.

Exercice 2 – Tchebychev contre calcul exact

Soit $X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

a) Calculer exactement $\mathbb{P}(|X-5| \geq 3)$.

b) La majorer par Bienaymé-Tchebychev.

c) Même comparaison pour $\mathbb{P}(|X-5| \geq 2)$. Commenter la qualité de la borne.

Exercice 3 – Somme de cent dés

On lance 100 dés équilibrés indépendants ; S est la somme.

a) Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$.

b) Majorer $\mathbb{P}(|S-350| \geq 50)$.

c) Déterminer ε tel que Tchebychev garantisse $\mathbb{P}(|S-350| \geq \varepsilon) \leq 0{,}05$.

Exercice 4 – La loi faible des grands nombres pour une fréquence

On répète n fois, de façon indépendante, une expérience de probabilité de succès p ; F_n est la fréquence des succès.

a) Calculer $\mathbb{E}(F_n)$ et $\mathrm{V}(F_n)$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(|F_n-p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ quelle que soit p.

c) En déduire que cette probabilité tend vers 0 : interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Taille d'un échantillon de sondage

On veut estimer la proportion p d'électeurs favorables à un projet par la fréquence F_n observée sur un échantillon de n personnes (tirages indépendants).

a) Quelle taille n garantit, par Tchebychev, $\mathbb{P}(|F_n - p| \geq 0{,}05) \leq 0{,}05$?

b) Même question avec une précision de 0,01.

c) Comment évolue n quand on divise la précision par 5 ? Commenter.

Exercice 6 – Moyenne de lancers de dés

On lance n dés et l'on note $\overline{X}_n$ la moyenne des résultats.

a) Calculer $\mathbb{E}(\overline{X}_n)$ et $\mathrm{V}(\overline{X}_n)$.

b) Combien de lancers garantissent $\mathbb{P}(|\overline{X}_n - 3{,}5| \geq 0{,}1) \leq 0{,}05$?

c) Un joueur obtient une moyenne de 3,8 sur 1 000 lancers. Le dé est-il suspect ? (Utiliser Tchebychev.)

Exercice 7 – Majorer grâce au second moment

a) Montrer que pour toute variable X et $a > 0$: $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}$ (Markov appliqué à X^2).

b) En déduire Bienaymé-Tchebychev en l'appliquant à $X - \mathbb{E}(X)$.

c) Application : une erreur de mesure X vérifie $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 0{,}2$ mm. Majorer la probabilité d'une erreur d'au moins 1 mm.

Exercice 8 – Contrôle qualité à grande échelle

Une usine produit 10 000 pièces ; chacune est défectueuse avec probabilité 0,01, indépendamment. X est le nombre de pièces défectueuses.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma(X)$.

b) Majorer $\mathbb{P}(X \geq 150)$ par Markov, puis par Tchebychev.

c) Quel stock de pièces de rechange prévoir pour couvrir les défauts avec probabilité au moins 0,99 (Tchebychev) ?

Exercice 9 – Une borne exponentielle (inégalité de Chernoff)

Soit $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

a) Montrer que $\mathbb{E}(3^X) = 2^n$ (fonction génératrice).

b) En appliquant Markov à 3^X, montrer que $\mathbb{P}\left(X \geq \frac{3n}{4}\right) \leq \left(\frac{2}{3^{3/4}}\right)^n$.

c) Comparer pour $n = 100$ avec la borne de Tchebychev. (On donne $\frac{2}{3^{3/4}} \approx 0{,}877$ et $0{,}877^{100} \approx 2 \times 10^{-6}$.)

Exercice 10 – Somme de variables de Bernoulli de paramètres différents

Soient $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, $X_i \sim B(p_i)$, et $S = \sum X_i$.

a) Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$ et montrer que $\mathrm{V}(S) \leq \frac{n}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S}{n} - \overline{p}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$, où $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum p_i$.

c) Application : 100 questions de difficultés variées, un élève a la probabilité p_i de réussir la i-ième ; la moyenne des p_i est 0,7. Majorer la probabilité que son score s'écarte de 70 d'au moins 15.

Exercice 11 – Quand Tchebychev ne dit rien

Soit $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

a) Montrer que la borne de Tchebychev pour $\mathbb{P}(|X - \frac{n}{2}| \geq \varepsilon)$ est ≥ 1 dès que $\varepsilon \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$.

b) Interpréter : à quelle échelle se situent les fluctuations de X ?

c) Pour $n = 400$, calculer $\sigma(X)$ et la borne pour $\varepsilon = 20$ et $\varepsilon = 40$.

Exercice 12 – Estimer une probabilité par simulation

On veut estimer par simulation la probabilité p qu'une somme de trois dés dépasse 12. On simule n lancers indépendants de trois dés et l'on calcule la fréquence F_n des sommes > 12.

a) Écrire un programme Python qui calcule F_n.

b) Combien de simulations garantissent, par Tchebychev, une erreur inférieure à 0,01 avec probabilité au moins 0,99 ?

c) La valeur exacte est $p = \frac{56}{216}$. La calculer et commenter.

Exercice 13 – Moyenne empirique : espérance et variance

Soient $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de même loi, d'espérance m et de variance σ^2, et $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum X_i$.

a) Montrer que $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = m$ et $\mathrm{V}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

b) Où a-t-on utilisé l'indépendance ? Que devient $\mathrm{V}(\overline{X}_n)$ si $X_1 = X_2 = \ldots = X_n$?

c) En déduire la loi faible des grands nombres.

Exercice 14 – Markov et les valeurs extrêmes

Soit X à valeurs dans $[\![0, 10]\!]$ avec $\mathbb{E}(X) = 8$.

a) Majorer $\mathbb{P}(X \leq 5)$ en appliquant Markov à $10 - X$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(X \geq 6) \geq \frac{1}{2}$.

c) Donner une loi pour laquelle la borne de a) est atteinte.

Exercice 15 – Synthèse : la loi des grands nombres et l'assurance

Une compagnie assure n clients indépendants ; chacun déclare un sinistre de 10 000 € avec probabilité 0,01 dans l'année. La prime annuelle est de 120 € par client.

a) Soit X le nombre de sinistres. Exprimer le résultat $R = 120n - 10\,000X$ et son espérance.

b) Montrer que $\mathbb{P}(R < 0) \leq \frac{2\,475}{n}$ par Tchebychev.

c) Combien de clients faut-il pour que la probabilité de perte soit au plus 1 % ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Expliquer pourquoi l’assurance n’est viable que pour un grand nombre de clients, et pourquoi la prime dépasse l’espérance du coût (100 €).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).