Plaquette 1 – Dérivées partielles, gradient et recherche d'extremums

Fonctions de deux variables — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions du cours.

— **Dérivée partielle** : $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ — on dérive en x, y **étant figée**.

— **Fonction de classe** C^1 : les deux dérivées partielles existent et sont **continues** sur l'ouvert considéré. Alors f est continue et admet un développement d'ordre 1.

— **Gradient** :

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

— **Développement d'ordre 1** :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o(\|(h,k)\|)$$

— **Plan tangent** au graphe en (a,b) :

$$z = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

— **Règle de la chaîne** : si $g(t) = f(x(t),y(t))$, alors

$$g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))$$

— **Théorème de Schwarz** : si f est C^2, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

— **Point critique** : point où $\nabla f = (0,0)$. Un extremum **local intérieur** d'une fonction C^1 est nécessairement un point critique — la réciproque est fausse (**point col**).

— **Le gradient indique la direction de plus forte croissance** ; il est orthogonal aux lignes de niveau.

Correction de l'exercice 1 – Dérivées partielles

— **Par rapport à** x (on traite y comme une constante) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^3$$

— **Par rapport à** y (on traite x comme une constante) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 9xy^2$$

— **Contrôle en** $(1,1)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2+3 = 5$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 1+9 = 10$.

— Vérification numérique : $f(1{,}001\,;1) = 1{,}002001 + 3{,}003 = 4{,}005001$ contre $f(1,1) = 4$, soit un taux $\approx 5{,}00$. Cohérent.

Réponse. $2xy + 3y^3$ et $x^2 + 9xy^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Dérivées partielles d'un quotient

— **En** x : on applique $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = x$, $v = x^2 + y^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - x \times 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

— **En** y : le numérateur x ne dépend pas de y, donc on dérive $x \times (x^2 + y^2)^{-1}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

— **Contrôle** : sur l'axe $y = 0$ (avec $x \neq 0$), $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$, ce qui est cohérent avec $f(x, 0) = \frac{1}{x}$.

Réponse. $\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ et $-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

Correction de l'exercice 3 – Gradient et plan tangent

— $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, donc $\nabla f(1, 2) = (2, 4)$.

— $f(1, 2) = 1 + 4 = 5$.

— **Plan tangent** :

$$z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2) = 2x + 4y - 5$$

— **Contrôle** : au point $(1, 2)$ le plan donne $z = 2 + 8 - 5 = 5 = f(1, 2)$. Cohérent.

— **Position** : $f(x, y) - (2x + 4y - 5) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$ — le paraboloïde est **au-dessus** de son plan tangent partout (la fonction est convexe).

Réponse. $\nabla f(1, 2) = (2, 4)$; plan $z = 2x + 4y - 5$.

Correction de l'exercice 4 – Théorème de Schwarz

Dérivées premières :

— $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + ye^{xy}$;

— $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + xe^{xy}$.

Dérivées croisées :

— $\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + ye^{xy}\right) = 6x^2y + e^{xy} + xye^{xy}$ (produit $y \times e^{xy}$).

— $\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y + xe^{xy}\right) = 6x^2y + e^{xy} + xye^{xy}$.

— Les deux résultats **coïncident**, conformément au théorème de Schwarz : f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme et composée de fonctions usuelles.

— **Utilité pratique** : on peut choisir l'ordre de dérivation le plus simple à calculer.

Réponse. Les deux valent $6x^2y + (1 + xy)e^{xy}$.

Correction de l'exercice 5 – Règle de la chaîne

Méthode 1 — règle de la chaîne.

— $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x$.

— $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$g'(t) = -\sin t\,(2\cos t + \sin t) + \cos t \times \cos t = -2\sin t\cos t - \sin^2 t + \cos^2 t$$

— Soit $g'(t) = -\sin(2t) + \cos(2t)$.

Méthode 2 — calcul direct.

— $g(t) = \cos^2 t + \cos t \sin t = \dfrac{1+\cos 2t}{2} + \dfrac{\sin 2t}{2}$.

— Donc $g'(t) = -\sin 2t + \cos 2t$. **Les deux méthodes concordent.**

— **Contrôle en** $t = 0$: $g'(0) = 1$; et $g(t) \approx 1 + t$ près de 0 puisque $g(0) = 1$. Cohérent.

Réponse. $g'(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$.

Correction de l'exercice 6 – Points critiques

On résout $\nabla f = (0, 0)$.

— $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0$ donne $x = 1$.

— $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 = 0$ donne $y = 2$.

— **Unique point critique** : $(1, 2)$, où $f(1, 2) = 1 + 4 - 2 - 8 + 7 = 2$.

— **Nature** : en complétant les carrés,

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2$$

— La forme est une somme de carrés plus 2 : $(1, 2)$ est un **minimum global** de valeur 2.

— **Méthode à retenir** : pour les polynômes du second degré, la **mise sous forme canonique** tranche définitivement la question de la nature de l'extremum.

Réponse. $(1, 2)$, minimum global de valeur 2.

Correction de l'exercice 7 – Point col

— $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$: le gradient est nul uniquement en $(0, 0)$.

— $f(0, 0) = 0$.

— **Sur l'axe des abscisses** : $f(x, 0) = x^2 > 0$ pour $x \neq 0$ — f est **plus grande** qu'en $(0, 0)$.

— **Sur l'axe des ordonnées** : $f(0, y) = -y^2 < 0$ pour $y \neq 0$ — f est **plus petite**.

— Dans tout voisinage de l'origine, f prend donc des valeurs strictement supérieures **et** strictement inférieures à $f(0, 0)$: ce n'est ni un maximum ni un minimum.

— C'est un **point col** (ou point selle) : la surface a la forme d'une **selle de cheval**, d'où le nom.

— **Morale** : $\nabla f = 0$ est nécessaire mais pas suffisant ; il faut toujours étudier le comportement local.

Réponse. Point critique unique $(0, 0)$, mais point col.

Correction de l'exercice 8 – Extremum sous contrainte

Méthode de substitution (la plus sûre au niveau MPSI).

— La contrainte donne $y = 2 - x$.

— On étudie $g(x) = x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4$.

— $g'(x) = 4x - 4$, nulle en $x = 1$, négative avant, positive après : **minimum** en $x = 1$.

— Alors $y = 1$ et $g(1) = 1 + 1 = 2$.

— **Minimum** : $f = 2$ atteint en $(1, 1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Interprétation géométrique** : $\sqrt{f}$ est la distance à l'origine ; on cherche le point de la droite $x + y = 2$ le plus proche de O, qui est son **projeté orthogonal**. La distance vaut $\frac{|0+0-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, donc $f = 2$. Cohérent.

Réponse. Minimum 2 en $(1, 1)$.

Correction de l'exercice 9 – Fonction homogène

— $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy$.

— Membre de gauche :

$$x(3x^2 + 2y^2) + y(4xy) = 3x^3 + 2xy^2 + 4xy^2 = 3x^3 + 6xy^2$$

— Membre de droite : $3f(x, y) = 3x^3 + 6xy^2$. **Égalité vérifiée.**

— **Pourquoi** 3 **?** f est **homogène de degré 3** : $f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$. La relation d'Euler s'obtient en dérivant cette identité en t puis en prenant $t = 1$.

— **Utilité** : en physique et en économie, l'homogénéité traduit un comportement d'échelle (rendements constants, lois de similitude).

Réponse. Les deux membres valent $3x^3 + 6xy^2$.

Correction de l'exercice 10 – Continuité en deux variables

On teste des **chemins** différents vers l'origine.

— **Le long des axes** ($y = 0$ ou $x = 0$) : $f = 0$, la limite semble être 0.

— **Le long de la droite** $y = x$: $f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ pour tout $x \neq 0$.

— Deux chemins donnent deux limites différentes (0 et $\frac{1}{2}$) : f n'admet **pas de limite** en $(0, 0)$, elle n'est donc **pas continue** en ce point.

— **Confirmation en polaires** : avec $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on trouve $f = \cos\theta \sin\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$, indépendant de r : la valeur dépend uniquement de la **direction** d'approche.

— **Différence essentielle avec une variable** : en dimension 2, il ne suffit pas de tester « à gauche » et « à droite » — il y a une infinité de chemins.

Réponse. Non : limite 0 selon les axes, $\frac{1}{2}$ selon $y = x$.

Correction de l'exercice 11 – Problème d'optimisation concret

Notons x et y les côtés de la base et h la hauteur.

— **Contrainte** : $xyh = 32$, donc $h = \frac{32}{xy}$.

— **Surface** (fond + 4 faces latérales) : $S = xy + 2xh + 2yh = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$.

— **Points critiques** :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2} = 0$$

— De la première : $y = \frac{64}{x^2}$. En substituant dans la seconde : $x = \frac{64}{\left(\frac{64}{x^2}\right)^2} = \frac{x^4}{64}$, donc $x^3 = 64$ et $x = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Alors $y = \frac{64}{16} = 4$ et $h = \frac{32}{16} = 2$.
— **Surface minimale** : $S = 16 + 16 + 16 = 48$ dm^2.
— **Contrôle** : avec $x = y = 8$, $h = 0{,}5$: $S = 64 + 8 + 8 = 80 > 48$. Avec $x = y = 2$, $h = 8$: $S = 4 + 32 + 32 = 68 > 48$. Le point trouvé est bien meilleur.

Réponse. Base 4×4 dm, hauteur 2 dm, surface 48 dm^2.

Correction de l'exercice 12 – Dérivée selon un vecteur

a) $f\left(1 + \frac{3t}{5}, 2 + \frac{4t}{5}\right) = \left(1 + \frac{3t}{5}\right)^2\left(2 + \frac{4t}{5}\right) = 2 + \frac{16}{5}t + O(t^2)$ (termes en t : $2 \cdot \frac{6t}{5} + \frac{4t}{5}$). La limite vaut $\frac{16}{5}$.

b) $\nabla f = (2xy, x^2)$, $\nabla f(1,2) = (4,1)$ et, f étant C^1 :

$$D_u f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot u = 4 \times \frac{3}{5} + 1 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$

c) Par Cauchy-Schwarz, $\nabla f \cdot u \le \|\nabla f\|$ avec égalité pour $u = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(4,1)}{\sqrt{17}}$: dérivée maximale $\sqrt{17} \approx 4{,}12$. Le gradient donne la **direction de plus forte pente**.

Réponse. $D_u f(1,2) = \frac{16}{5}$; maximum $\sqrt{17}$ dans la direction $\frac{(4,1)}{\sqrt{17}}$.

Correction de l'exercice 13 – Coordonnées polaires

a) Règle de la chaîne avec $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

b) $f = x^2 + y^2$: $g = r^2$, $\frac{\partial g}{\partial r} = 2r = \cos\theta \cdot 2r\cos\theta + \sin\theta \cdot 2r\sin\theta$ ✓, $\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$ ✓. $f = xy$: $g = \frac{r^2}{2}\sin 2\theta$, $\frac{\partial g}{\partial \theta} = r^2\cos 2\theta$ et la formule donne $-r\sin\theta \cdot r\sin\theta + r\cos\theta \cdot r\cos\theta$ ✓.

c) $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. La condition équivaut à g indépendante de θ (sur chaque demi-droite $r > 0$, θ décrivant un intervalle), c'est-à-dire f constante sur les cercles centrés en O.

Réponse. $g_r = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y$, $g_\theta = -r\sin\theta f_x + r\cos\theta f_y$.

Correction de l'exercice 14 – Lignes de niveau et gradient

a) $x^2 + 4y^2 = c$: ellipse centrée en O, de demi-axes $\sqrt{c}$ (horizontal) et $\frac{\sqrt{c}}{2}$ (vertical).

b) $\nabla f = (2x, 8y)$, $\nabla f(2,1) = (4,8)$. La ligne de niveau passant par $(2,1)$ est $x^2 + 4y^2 = 8$; sa tangente en $(2,1)$ a pour équation

$$\nabla f(2,1) \cdot (x-2, y-1) = 0 \Leftrightarrow 4(x-2) + 8(y-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 4$$

c) Un vecteur directeur de $x + 2y = 4$ est $(2,-1)$, et $(4,8) \cdot (2,-1) = 8 - 8 = 0$ ✓. Le gradient est **normal** aux lignes de niveau et pointe vers les valeurs croissantes de f (vers l'extérieur de l'ellipse).

Réponse. Ellipses ; $\nabla f(2,1) = (4,8)$; tangente $x + 2y = 4$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : extremums d'une fonction de deux variables

a) On résout le système $\nabla f = (0,0)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$ donne $y = x^2$.
— $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$ donne $x = y^2 = x^4$.
— Donc $x^4 - x = x(x^3 - 1) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = 1$.
— **Points critiques** : $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

b) **En** $(1, 1)$: $f(1, 1) = 1 + 1 - 3 = -1$. Posons $x = 1 + h$, $y = 1 + k$.

— Le développement donne $f = -1 + 3(h^2 + k^2 - hk) + h^3 + k^3$.
— Or $h^2 - hk + k^2 = \left(h - \dfrac{k}{2}\right)^2 + \dfrac{3k^2}{4} > 0$ pour $(h, k) \neq (0, 0)$: la partie quadratique est **définie positive**.
— Donc $(1, 1)$ est un **minimum local**, de valeur -1.

En $(0, 0)$: $f(0, 0) = 0$.

— Sur la droite $y = x$: $f(x, x) = 2x^3 - 3x^2 = x^2(2x - 3) < 0$ pour $0 < x < 1{,}5$.
— Sur la droite $y = -x$: $f(x, -x) = 3x^2 > 0$ pour $x \neq 0$.
— f prend donc les deux signes au voisinage de l'origine : $(0, 0)$ est un **point col**.
— **Remarque** : f n'a pas d'extremum global, car $f(x, 0) = x^3 \to \pm\infty$.

Réponse. a) $(0, 0)$ et $(1, 1)$ · b) $(1, 1)$ minimum local (-1), $(0, 0)$ point col.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).