Plaquette 5 – Extremums et optimisation

Fonctions de deux variables — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Condition nécessaire : si f est C^1 sur un ouvert U et admet un extremum local en $(a,b) \in U$,

$$\nabla f(a,b) = (0,0)$$

- **Réciproque fausse** : point col (ex. $x^2 - y^2$) ; pour conclure, étudier $f(a+h,b+k) - f(a,b)$.
- **Formes quadratiques** : $ah^2 + 2bhk + ck^2 = a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}k^2$ ($a \neq 0$) : de signe constant si $ac - b^2 > 0$.
- **Théorème des bornes atteintes** : f continue sur une partie **fermée bornée** de $\mathbb{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes.
- **Moindres carrés** : la droite $y = ax + b$ minimisant $\sum (y_i - ax_i - b)^2$ passe par le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$, avec $a = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)}$.

Correction de l'exercice 1 – Minimum par complétion du carré

a) On annule le gradient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2x - 2 = 0$$

- d'où $x = y$ et $4y = 2$: point critique $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - 1 + 5 = \frac{9}{2}$.

b) $x^2 - 2xy + 3y^2 = (x-y)^2 + 2y^2$, donc $f = (x-y)^2 + 2y^2 - 2y + 5 = (x-y)^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$. Donc $f \geq \frac{9}{2}$ avec égalité seulement en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: **minimum global strict**.

c) $f = c > \frac{9}{2}$: ellipses centrées en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Réponse. Minimum global $\frac{9}{2}$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 2 – Un col et deux minimums

a) $\nabla f = (4x^3 - 4y,\ 4y^3 - 4x)$. $y = x^3$ et $x = y^3 = x^9$: $x(x^8 - 1) = 0$, $x \in \{0, 1, -1\}$. Points critiques : $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

b) $f(t,t) = 2t^4 - 4t^2 < 0$ et $f(t,-t) = 2t^4 + 4t^2 > 0$ pour $t \neq 0$ petit, alors que $f(0,0) = 0$: **col**.

c) On développe :

$$(x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 2x^2y^2 - 4xy + 2 = f + 2$$

- Donc $f \geq -2$, avec égalité si et seulement si $x^2 = y^2$ et $xy = 1$, c'est-à-dire en $(1,1)$ et $(-1,-1)$: **minimums globaux**, $f = -2$.

Réponse. Col en $(0,0)$; minimums globaux -2 en $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Extremums sur un disque

a) f est continue et D est fermé borné : bornes atteintes.

b) $\nabla f = (2x-1, 2y) = 0$ en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, intérieur à D, avec $f = -\frac{1}{4}$.

c) Sur le bord, $x^2 + y^2 = 1$ donc

$$f = 1 - x, \quad x \in [-1, 1]$$

— maximum 2 en $(-1, 0)$, minimum 0 en $(1, 0)$.

d) On compare les candidats $-\frac{1}{4}$, 2, 0 : **minimum** $-\frac{1}{4}$ en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, **maximum** 2 en $(-1, 0)$. (Contrôle : $f = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4}$ est la distance au carré au point $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ moins $\frac{1}{4}$; le point de D le plus loin de $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est bien $(-1, 0)$.)

Réponse. Minimum $-\frac{1}{4}$ en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, maximum 2 en $(-1, 0)$.

Correction de l'exercice 4 – Droite des moindres carrés

a) $\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum x_i(y_i - ax_i - b)$ et $\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum(y_i - ax_i - b)$. Avec $\sum x_i = 6$, $\sum x_i^2 = 14$, $\sum y_i = 9$, $\sum x_i y_i = 18$:

$$14a + 6b = 18, \qquad 6a + 4b = 9$$

b) $b = \frac{9 - 6a}{4}$, puis $14a + \frac{3(9-6a)}{2} = 18$, soit $5a = 4{,}5$: $a = 0{,}9$ et $b = 0{,}9$.

c) Résidus 0,1 ; 0,2 ; −0,7 ; 0,4 : $S_{\min} = 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}49 + 0{,}16 = 0{,}70$. Point moyen (1,5 ; 2,25) : $0{,}9 \times 1{,}5 + 0{,}9 = 2{,}25$ ✓. (S est un trinôme convexe en (a, b), donc le point critique est bien le minimum.)

Réponse. $y = 0{,}9x + 0{,}9$, $S_{\min} = 0{,}70$.

Correction de l'exercice 5 – Boîte de surface minimale

a) Surface : fond xy plus quatre faces $2xz + 2yz$, avec $z = \frac{32}{xy}$:

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

b) $\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2} = 0$. Donc $yx^2 = 64 = xy^2$, d'où $x = y$ et $x^3 = 64$: $x = y = 4$.

c) S continue tend vers $+\infty$ quand $x \to 0$, $y \to 0$ ou $xy \to +\infty$: elle atteint un minimum, en un point critique, donc en $(4, 4)$. Dimensions : fond 4×4 dm, hauteur $z = 2$ dm, surface $16 + 16 + 16 = 48$ dm². (La hauteur vaut la moitié du côté : le fond compte une fois, le couvercle manquant n'est pas payé.)

Réponse. Fond 4×4 dm, hauteur 2 dm, surface 48 dm².

Correction de l'exercice 6 – Distance d'un point à un plan

a) $z = \frac{9 - x - 2y}{2}$ et $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = g(x, y)$.

b) On annule le gradient :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - \frac{9 - x - 2y}{2} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y - (9 - x - 2y) = 0$$

— soit $5x + 2y = 9$ et $x + 4y = 9$: $x = 1$, $y = 2$, puis $z = 2$.

c) $OM^2 = 1 + 4 + 4 = 9$: distance 3. Formule : $\frac{|-9|}{\sqrt{9}} = 3$ ✓. Le point $(1, 2, 2)$ est colinéaire

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

au vecteur normal $(1, 2, 2)$: c'est le **projeté orthogonal** de O. (g est un trinôme convexe : minimum global.)

Réponse. Point $(1, 2, 2)$, distance 3.

Correction de l'exercice 7 – Produit maximal à somme fixée

a) $z = 12 - x - y \geq 0$.

b) f continue sur le fermé borné T : maximum atteint. Sur le bord ($x = 0$, $y = 0$ ou $x + y = 12$), $f = 0$, alors que $f(4, 4) = 64 > 0$: le maximum est intérieur, donc en un point critique.

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = y(12 - 2x - y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x(12 - x - 2y) = 0$; à l'intérieur ($x, y > 0$) :

$$2x + y = 12, \quad x + 2y = 12 \quad \Longrightarrow \quad x = y = 4$$

— Maximum $4 \times 4 \times 4 = 64$. IAG : $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3} = 4$, avec égalité si $x = y = z$ ✓.

Réponse. Maximum 64 pour $x = y = z = 4$.

Correction de l'exercice 8 – Maximiser un profit

a) $\frac{\partial P}{\partial x} = 20 - 2x - y = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = 30 - x - 2y = 0$: $x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{40}{3}$.

b) Avec $X = x - \frac{10}{3}$, $Y = y - \frac{40}{3}$, les termes du premier ordre disparaissent (point critique) :

$$P = P_{\max} - \left(X^2 + XY + Y^2\right) = P_{\max} - \left(X + \frac{Y}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}Y^2$$

— donc $P \leq P_{\max}$ partout : **maximum global**.

c) Environ 3 333 unités du premier produit et 13 333 du second ; $P_{\max} = P\left(\frac{10}{3}, \frac{40}{3}\right) = \frac{700}{3} \approx 233{,}3$ k€.

Réponse. $(x, y) = \left(\frac{10}{3}, \frac{40}{3}\right)$; profit maximal $\frac{700}{3} \approx 233$ k€.

Correction de l'exercice 9 – Quand le premier ordre ne suffit pas

On compare directement $f(h, k)$ à $f(0, 0) = 0$:

$$f(0, k) = k^4, \quad g(0, k) = -k^4, \quad h(0, k) = k^3$$

a) $f \geq 0$ partout, nulle seulement en $(0, 0)$: **minimum global strict**.

b) $g(t, 0) = t^2 > 0$ et $g(0, t) = -t^4 < 0$: **col**.

c) $h(0, t) = t^3$ change de signe : **ni minimum ni maximum**.

— Les trois fonctions ont la même partie quadratique x^2, dégénérée (elle s'annule sur tout l'axe des y) : c'est le terme suivant, dans la direction où elle s'annule, qui décide.

Réponse. a) minimum · b) col · c) pas d'extremum.

Correction de l'exercice 10 – Fonction radiale : cercle de maximums

a) $\varphi'(u) = (1 - u)\mathrm{e}^{-u}$: φ croît sur $[0, 1]$, décroît ensuite ; $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$, $\varphi \to 0$ en $+\infty$.

b) Minimum global 0 en $(0, 0)$; maximum global $\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368$ sur **tout le cercle** $x^2 + y^2 = 1$.

c) Règle de la chaîne :

$$\nabla f = 2\varphi'(x^2 + y^2)\,(x, y) = 2(1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)}(x, y)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— nul en $(0,0)$ et sur le cercle unité ✓. Les maximums ne sont **pas stricts** : dans tout voisinage d'un point du cercle, il y a d'autres points du cercle où f prend la même valeur.

Réponse. Minimum 0 en O ; maximum $\frac{1}{\mathrm{e}}$ sur le cercle unité (non strict).

Correction de l'exercice 11 – Triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle

a) Chaque côté forme avec le centre un triangle isocèle d'aire $\frac{1}{2}\sin(\text{angle au centre})$; on somme (formule valable même pour un angle au centre $> \pi$, dont le sinus négatif retranche l'aire correspondante). Et $\sin(2\pi - a - b) = -\sin(a+b)$.

b) $\frac{\partial g}{\partial a} = \cos a - \cos(a+b) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial b} = \cos b - \cos(a+b) = 0$, donc $\cos a = \cos b$; dans le domaine, cela donne $a = b$ (ou $a + b = 2\pi$, exclu) puis $\cos a = \cos 2a$: $a = \frac{2\pi}{3}$.

c) g est continue sur le triangle fermé, nulle sur le bord, et $g\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0$: le maximum est intérieur, au seul point critique. Le triangle d'aire maximale est **équilatéral**, d'aire

$$A_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}299$$

Réponse. Triangle équilatéral, aire $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}30$.

Correction de l'exercice 12 – Extremums sur un carré

a) $\nabla f = (2x - y - 1,\ 2y - x) = 0$: $x = 2y$, $3y = 1$. Point $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, intérieur, $f = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

b) On se ramène à une variable sur chaque côté :

$$f(0,y) = y^2, \quad f(1,y) = y^2 - y, \quad f(x,0) = x^2 - x, \quad f(x,1) = (x-1)^2$$

— Sur $[0,1]$: $y^2 \in [0,1]$; $y^2 - y \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$; $x^2 - x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$; $(x-1)^2 \in [0,1]$.

c) Candidats : $-\frac{1}{3}$ (intérieur), $-\frac{1}{4}$, 0, 1 (bord). **Minimum** $-\frac{1}{3}$ en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, **maximum** 1 en $(0,1)$.

Réponse. Minimum $-\frac{1}{3}$ en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, maximum 1 en $(0,1)$.

Correction de l'exercice 13 – Répartir un budget

a) $2x + 3y = 90$, $x = \frac{90 - 3y}{2}$, et l'on maximise $\ln U = \frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln y$ (même maximum) sur $]0, 30[$:

$$\psi(y) = \frac{1}{3}\ln\frac{90-3y}{2} + \frac{2}{3}\ln y, \qquad \psi'(y) = \frac{-1}{90-3y} + \frac{2}{3y}$$

b) $\psi'(y) = 0 \Leftrightarrow 3y = 2(90 - 3y) \Leftrightarrow y = 20$, puis $x = 15$ (ψ' décroissante : maximum). Dépenses : 30 € et 60 €, soit $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ du budget (les exposants !). $U \approx 18{,}17$.

c) $\frac{U_x}{U_y} = \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{2/3}}{\frac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3}} = \frac{y}{2x} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ ✓. Les gradients de U et de la contrainte sont colinéaires : la ligne de niveau de U est **tangente** à la droite de budget.

Réponse. $x = 15$, $y = 20$; $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ du budget.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Point critique non isolé et bord

a) Somme de deux termes positifs ; nulle si et seulement si $x = y$ et $x + y = 2$, soit $(1, 1)$.

b) On annule les deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y) + 4(x + y - 2)^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x - y) + 4(x + y - 2)^3$$

— Somme : $8(x + y - 2)^3 = 0$; différence : $4(x - y) = 0$. Unique point critique $(1, 1)$.

c) $(1, 1)$ est à distance $\sqrt{2}$ de O : il est **sur le bord** du disque. Le minimum 0 y est atteint (et nulle part ailleurs). Un minimum sur un fermé peut être atteint sur le bord **et** être un point critique : les deux études se recoupent, il n'y a pas de contradiction.

Réponse. Minimum 0 en $(1, 1)$, point critique situé sur le bord du disque.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : où implanter un entrepôt ?

a) $F = \sum((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)$, $\nabla F = 2\left(\sum(x - x_i), \sum(y - y_i)\right)$, nul si et seulement si

$$x = \frac{0 + 6 + 0}{3} = 2, \qquad y = \frac{0 + 0 + 9}{3} = 3$$

— $G(2, 3)$: c'est l'unique point critique, et F (trinôme convexe) y est minimale.

b) $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}$ et $\sum \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$: $\sum MA_i^2 = 3MG^2 + \sum GA_i^2$.
$F(G) = (4 + 9) + (16 + 9) + (4 + 36) = 78$ km².

c) Même calcul pondéré : barycentre $\left(\frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0}{6}, \frac{3 \cdot 9}{6}\right) = (2\,;4{,}5)$.

d) Avec les carrés, F est un polynôme de degré 2 : $\nabla F = 0$ est un système **linéaire**. Les distances font apparaître des racines carrées, non dérivables aux points A_i, et un système non linéaire.

Réponse. Centre de gravité $G(2, 3)$, $F(G) = 78$; pondéré : $(2\,;4{,}5)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).