Plaquette 4 – Gradient, lignes de niveau et plan tangent

Fonctions de deux variables — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Plan tangent au graphe de f en $(a, b, f(a, b))$:

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

— **Tangente à la ligne de niveau** $f = c$ en (a, b), si $\nabla f(a, b) \neq 0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$.

— **Dérivée directionnelle** ($\|u\| = 1$) : $D_u f = \nabla f \cdot u \in [-\|\nabla f\|, \|\nabla f\|]$.

— **Orthogonalité** : si γ est une courbe tracée sur la ligne de niveau, $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$.

— **Champ de gradients** : $(P, Q) = \nabla f$ avec f de classe $C^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Correction de l'exercice 1 – Plan tangent à un paraboloïde

a) $\nabla f = (2x, 2y)$, $\nabla f(1, 2) = (2, 4)$:

$$z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2), \qquad \text{soit } z = 2x + 4y - 5$$

b) $2 \times 1{,}1 + 4 \times 1{,}9 - 5 = 4{,}8$; exact : $1{,}21 + 3{,}61 = 4{,}82$. Écart $0{,}02 = (0{,}1)^2 + (-0{,}1)^2$.

c) $f(x, y) - (5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$; de même en tout point (a, b) : l'écart vaut $(x - a)^2 + (y - b)^2$. Le paraboloïde est **convexe**.

Réponse. $z = 2x + 4y - 5$; $f(1{,}1; 1{,}9) \approx 4{,}8$ (exact 4,82).

Correction de l'exercice 2 – Plan tangent à une sphère

a) $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{g}$, de même en y : $\nabla g(1, 2) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.

b) Plan tangent :

$$z = 2 - \frac{1}{2}(x - 1) - (y - 2) \Leftrightarrow x + 2y + 2z = 9$$

— Vecteur normal $(1, 2, 2) = \overrightarrow{OA}$: le plan tangent à une sphère est orthogonal au rayon ✓.

c) $d = \frac{|0 + 0 + 0 - 9|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{3} = 3$: c'est le rayon, comme attendu.

Réponse. Plan tangent $x + 2y + 2z = 9$, normal à $\overrightarrow{OA}$; distance 3.

Correction de l'exercice 3 – Pourquoi le gradient est normal aux lignes de niveau

a) $f(\gamma(t)) = c$ pour tout t, donc sa dérivée est nulle ; par la règle de la chaîne :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t)) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y} = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

b) $\nabla f = (4\cos t, 4\sin t)$, $\gamma' = (-2\sin t, 2\cos t)$: produit scalaire $-8\cos t \sin t + 8\sin t \cos t = 0$ ✓ (gradient radial, tangente orthoradiale).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $f(\gamma(t)) = t^2 + 1 - t^2 = 1$: ligne de niveau 1. $\nabla f = (-2x, 1) = (-2t, 1)$, $\gamma' = (1, 2t)$: $-2t + 2t = 0$ ✓.

Réponse. $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ par dérivation de $f \circ \gamma = c$.

Correction de l'exercice 4 – Tangente à une courbe implicite

a) $1 + 8 = 9$ ✓. Avec $F(x, y) = x^3 + y^3$, $\nabla F = (3x^2, 3y^2)$, $\nabla F(1, 2) = (3, 12)$:

$$3(x - 1) + 12(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 4y = 9$$

b) Horizontale si $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$: $x = 0$, $y = \sqrt[3]{9}$. Verticale si $y = 0$: $(\sqrt[3]{9}, 0)$.

c) $y = -x\left(1 - \frac{9}{x^3}\right)^{1/3} = -x\left(1 - \frac{3}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = -x + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$: asymptote $y = -x$, courbe au-dessus des deux côtés.

Réponse. Tangente $x + 4y = 9$; horizontale en $(0, \sqrt[3]{9})$, verticale en $(\sqrt[3]{9}, 0)$; asymptote $y = -x$.

Correction de l'exercice 5 – Direction de plus forte pente

a) $\nabla h = (-2x, -4y)$, $\nabla h(3, 2) = (-6, -8)$, de norme 10. On monte le plus vite dans la direction

$$u = \frac{\nabla h}{\|\nabla h\|} = (-0{,}6\,; -0{,}8), \qquad D_u h = \|\nabla h\| = 10 \text{ m/hm}$$

— soit une pente de 10 %.

b) Orthogonalement au gradient : $\pm(0{,}8\,; -0{,}6)$ (tangente à la ligne de niveau $h = 83$).

c) $x' = -2x$, $y' = -4y$: $x = 3\mathrm{e}^{-2t}$, $y = 2\mathrm{e}^{-4t}$. Alors $\mathrm{e}^{-4t} = \left(\frac{x}{3}\right)^2$ et $y = 2 \cdot \frac{x^2}{9} = \frac{2}{9}x^2$. Le randonneur rejoint le sommet $(0, 0)$ le long de cette parabole, qui coupe toutes les ellipses de niveau à angle droit.

Réponse. $\nabla h(3, 2) = (-6, -8)$, pente 10 % ; chemin $y = \frac{2}{9}x^2$.

Correction de l'exercice 6 – Familles orthogonales de courbes

a) $xy = c$: hyperboles d'asymptotes les axes ($c \neq 0$) ; $x^2 - y^2 = c$: hyperboles d'asymptotes les bissectrices.

b) $\nabla f = (y, x)$ et $\nabla g = (2x, -2y)$:

$$\nabla f \cdot \nabla g = 2xy - 2xy = 0$$

— Les tangentes aux lignes de niveau sont orthogonales aux gradients ; deux gradients orthogonaux (et non nuls hors de l'origine) donnent deux tangentes orthogonales.

c) $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$: g et $2f$ sont les parties réelle et imaginaire d'une fonction « holomorphe ». Leurs lignes de niveau sont toujours orthogonales (conditions de Cauchy-Riemann : $g_x = 2f_y$, $g_y = -2f_x$).

Réponse. $\nabla(xy) \cdot \nabla(x^2 - y^2) = 0$: familles d'hyperboles orthogonales.

Correction de l'exercice 7 – Potentiel et champ

a) $V = (x^2 + y^2)^{-1/2}$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \qquad \nabla V = -\frac{(x, y)}{r^3}, \qquad \vec{E} = \frac{(x, y)}{r^3}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\|\vec{E}\| = \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2}$; $\vec{E}$ est colinéaire au vecteur position, dirigé vers l'extérieur.

c) $V = c$: cercles centrés en O. Le champ, radial, est orthogonal aux cercles ✓ (cas particulier de « gradient normal aux lignes de niveau »).

Réponse. $\vec{E} = \frac{(x,y)}{r^3}$, $\|\vec{E}\| = \frac{1}{r^2}$; équipotentielles : cercles.

Correction de l'exercice 8 – Reconnaître un champ de gradients

Condition nécessaire (Schwarz) pour $(P, Q) = \nabla f$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

a) $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ✓. On intègre P en x : $f = x^2y + x + \varphi(y)$; puis $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 + 3y^2$, $\varphi = y^3 + C$. Donc $f = x^2y + x + y^3 + C$.

b) $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$: la condition échoue.

c) $\frac{\partial P}{\partial y} = a x \mathrm{e}^y$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\mathrm{e}^y$: $a = 2$. Alors $f = x^2\mathrm{e}^y + C$ (vérification immédiate).

Réponse. a) $x^2y + x + y^3 + C$ · b) non ($1 \neq -1$) · c) $a = 2$, $f = x^2\mathrm{e}^y$.

Correction de l'exercice 9 – Sensibilité de l'indice de masse corporelle

a) $I = \frac{70}{3{,}0625} \approx 22{,}86$. $\frac{\partial I}{\partial m} = \frac{1}{h^2} \approx 0{,}327$; $\frac{\partial I}{\partial h} = -\frac{2m}{h^3} \approx -26{,}1$.

b) Approximation affine :

$$\Delta I \approx \frac{1}{h^2}\Delta m - \frac{2m}{h^3}\Delta h$$

— $+1$ kg : $+0{,}33$; $+1$ cm ($\Delta h = 0{,}01$) : $-0{,}26$. Une erreur de 1 cm pèse presque autant qu'un kilogramme.

c) $\Delta I \approx 0$ si $\frac{\Delta m}{m} = 2\frac{\Delta h}{h}$: on se déplace le long de la ligne de niveau $m = Ih^2$ (une parabole), orthogonalement au gradient.

Réponse. $I \approx 22{,}9$; $+1$ kg : $+0{,}33$; $+1$ cm : $-0{,}26$.

Correction de l'exercice 10 – Plan tangent horizontal

a) Plan tangent horizontal $\Leftrightarrow \nabla f = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y = 0$$

— d'où $x = -2y$, $-4y + y = 3$, $y = -1$, $x = 2$: point $(2, -1)$, $f(2, -1) = 4 - 2 + 1 - 6 = -3$.

b) En posant $X = x - 2$, $Y = y + 1$: $f = X^2 + XY + Y^2 - 3 = \left(X + \frac{Y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}Y^2 - 3 \geq -3$, avec égalité si et seulement si $X = Y = 0$: **minimum global**.

c) Les lignes de niveau $f = c > -3$ sont des **ellipses** centrées en $(2, -1)$, d'axes dirigés par les bissectrices $(1, 1)$ et $(1, -1)$ (forme quadratique $X^2 + XY + Y^2$).

Réponse. Plan horizontal en $(2, -1)$, minimum global -3 ; lignes de niveau : ellipses.

Correction de l'exercice 11 – Plan tangent de direction imposée

a) Plan tangent en (a, b) : $z = f(a, b) + 2a(x - a) + 2b(y - b)$, de vecteur normal $(2a, 2b, -1)$. Parallèle à $(2, 4, -1)$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$2a = 2, \quad 2b = 4 \implies (a, b) = (1, 2),\ z = 5$$

b) $z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2) = 2x + 4y - 5$.

c) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 5 \geq -5$: minimum -5 en $(1, 2)$. Le point où le plan tangent est parallèle au plan donné est exactement celui où l'écart vertical est extrémal (ici, S passe à 5 sous le plan).

Réponse. Point $(1, 2, 5)$; plan tangent $z = 2x + 4y - 5$; minimum de l'écart -5.

Correction de l'exercice 12 – Pas de plan tangent au sommet d'un cône

a) $\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{|h|}{h}$ vaut ± 1 selon le signe de h : pas de limite.

b) $\frac{f(tu)}{t} = \frac{|t|\,\|u\|}{t} = 1$ pour $t > 0$: « dérivée à droite » égale à 1 dans toutes les directions (pente 1 quelle que soit la direction : c'est un cône de demi-angle 45°).

c) S'il existait un plan tangent, la dérivée selon u serait linéaire en u ; or elle vaut 1 pour u et 1 pour $-u$ (au lieu de valeurs opposées). Hors du sommet, f est C^1 et le plan tangent en (a, b) est

$$z = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

— qui passe par l'origine : il contient la génératrice du cône passant par le point de contact.

Réponse. Pas de dérivées partielles en 0 ; ailleurs, plan tangent $z = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ contenant une génératrice.

Correction de l'exercice 13 – Taux de variation d'une température

a) $T(M) = 20 + 60\mathrm{e}^{-2} \approx 28{,}12$ °C. $\frac{\partial T}{\partial x} = -120x\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$:

$$\nabla T(1, 1) = -120\mathrm{e}^{-2}(1, 1) \approx (-16{,}24\,;\,-16{,}24)$$

b) $u = \frac{(3,4)}{5}$: $D_u T = -16{,}24 \times \frac{3+4}{5} \approx -22{,}7$ °C/dm : elle se refroidit.

c) Se refroidir le plus vite, c'est aller selon $-\nabla T$, qui est ici dirigé par $\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$ (s'éloigner du centre chaud). Taux : $-\|\nabla T\| = -16{,}24\sqrt{2} \approx -22{,}97$ °C/dm, à peine plus que dans la direction $(3, 4)$, qui n'en est éloignée que de 8°.

Réponse. $T(M) \approx 28{,}1$ °C ; selon $(3, 4)$: $-22{,}7$ °C/dm ; refroidissement maximal selon $(1, 1)$: $-23{,}0$ °C/dm.

Correction de l'exercice 14 – Lignes de niveau et gradient nul

a) $f = \pm 1$: hyperboles d'asymptotes $y = \pm x$ (branches gauche-droite pour 1, haut-bas pour -1). $f = 0$: les deux droites $y = x$ et $y = -x$.

b) En $(0, 0)$, la ligne de niveau 0 est formée de **deux droites sécantes** : elle n'admet pas une tangente unique. Et

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

— c'est le point col de f (plaquette 1).

c) L'équation de la tangente $\nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b) = 0$ dégénère si $\nabla f(a, b) = 0$ (elle est vérifiée par tous les points). Hors des points critiques, la ligne de niveau est localement une courbe régulière (théorème des fonctions implicites, admis).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Niveau 0 : deux droites se coupant en $(0,0)$, où $\nabla f = 0$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une colline gaussienne

a) $x^2 + 2y^2 = 1{,}5$: $h(P) = 500\,\mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 111{,}6$ m. $\nabla h = h \cdot (-2x, -4y)$:

$$\nabla h(P) = 111{,}6 \times (-2,-2) \approx (-223\,;-223) \text{ m/km}$$

b) $\|\nabla h(P)\| \approx 315{,}6$ m/km, soit une pente de 31,6 % ou $\arctan(0{,}3156) \approx 17{,}5°$. Direction de montée maximale : $\frac{(-1,-1)}{\sqrt{2}}$, vers le sommet.

c) Orthogonal au gradient : $(1,-1)$.

d) Tangence à $\nabla h = h(-2x,-4y)$: (x', y') colinéaire à $(x, 2y)$, donc $\frac{y'}{x'} = \frac{2y}{x}$, soit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{x}$: $y = kx^2$. Par P : $0{,}5 = k$. Le ruisseau descend le long de $y = \frac{x^2}{2}$ (côté $x > 1$).

Réponse. $h(P) \approx 112$ m ; pente 31,6 % (17,5°) ; ruisseau le long de $y = \frac{x^2}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).