Plaquette 2 – Limites, continuité et fonctions de classe C^1

Fonctions de deux variables — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Norme et polaires : avec $r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$|x| \leq r, \qquad |y| \leq r, \qquad |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{r^2}{2}$$

- $f(x,y) \to \ell$ en $(0,0)$ si $|f(x,y)-\ell| \leq \varphi(r)$ avec $\varphi(r) \to 0$.
- **Composition avec un chemin** : si $f \to \ell$ en $(0,0)$ et $\gamma(t) \to (0,0)$, alors $f(\gamma(t)) \to \ell$ (contraposée : deux chemins, deux limites ⇒ pas de limite).
- **Dérivée partielle en** (a,b) : $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$.
- f **de classe** C^1 sur un ouvert U : dérivées partielles existantes et continues sur U ; alors $f(a+h,b+k) = f(a,b) + hf_x + kf_y + o(\|(h,k)\|)$.
- **Approximation affine** : $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$.

Correction de l'exercice 1 – Limite par majoration

On majore par une fonction de $r = \sqrt{x^2+y^2}$, avec les inégalités

$$x^2 \leq x^2+y^2 = r^2, \qquad |x|, |y| \leq r$$

a) $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, donc $|f(x,y)| \leq |y| \leq r \to 0$.

b) $|x^3| \leq |x|\, r^2 \leq r^3$, de même pour y : $|g(x,y)| \leq \frac{2r^3}{r^2} = 2r \to 0$.

c) $|xy| \leq \frac{r^2}{2}$, donc $|h(x,y)| \leq \frac{r}{2} \to 0$.

- En polaires, a) s'écrit $r\cos^2\theta \sin\theta$: un facteur r qui tend vers 0 fois une fonction **bornée** de θ.

Réponse. $|f| \leq r$, $|g| \leq 2r$, $|h| \leq \frac{r}{2}$: limites nulles.

Correction de l'exercice 2 – Absence de limite par les droites

a) Pour $x \neq 0$:

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

- constante, mais qui dépend de m : 0 sur l'axe des abscisses, $\frac{1}{2}$ sur la droite $y=x$. Deux chemins, deux limites : f n'a **pas de limite** en $(0,0)$.

b) $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$: ne dépend que de la **direction** d'arrivée, pas de la distance.

c) $f(x,0) = 0$ et $f(0,y) = 0$: les deux fonctions partielles tendent vers 0. La continuité « dans chaque direction des axes » ne suffit pas.

Réponse. $f(x,mx) = \frac{m}{1+m^2}$ dépend de m : pas de limite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Un piège : toutes les droites donnent 0

a) Axe des ordonnées : $f(0,y)=0$. Droite $y=mx$ ($m\neq 0$) :
$f(x,mx)=\dfrac{mx^3}{x^4+m^2x^2}=\dfrac{mx}{x^2+m^2}\to 0$. Axe des abscisses : $f(x,0)=0$.

b) Sur la parabole :

$$f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

— La limite le long de ce chemin est $\frac{1}{2}\neq 0$: f n'a **pas** de limite en $(0,0)$.

c) Tester toutes les droites ne prouve jamais l'existence d'une limite ; seule une **majoration** en fonction de r le fait. Ici les lignes de niveau de f sont des paraboles $y=\lambda x^2$, que les droites ne voient pas.

Réponse. Limites nulles sur les droites, mais $f(x,x^2)=\frac{1}{2}$: pas de limite.

Correction de l'exercice 4 – Dérivées partielles sans continuité

a) Par la définition, avec $f(h,0)=0$ et $f(0,h)=0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

b) $f(x,x)=\frac{1}{2}$ pour $x\neq 0$, ne tend pas vers $f(0,0)=0$ (exercice précédent) : f est discontinue.

c) En une variable, dérivable implique continue. En deux variables, l'existence des dérivées partielles ne regarde que les deux **axes** et n'implique rien sur le comportement dans les autres directions. C'est pourquoi on travaille avec la **classe** C^1 (dérivées partielles continues), qui, elle, entraîne la continuité.

Réponse. $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ mais f discontinue en $(0,0)$.

Correction de l'exercice 5 – Prolongement de classe C¹

a) Hors de l'origine, f est un quotient de fonctions continues. En $(0,0)$: $x^2y^2\leq\frac{r^4}{4}$, donc $|f|\leq\frac{r^2}{4}\to 0=f(0,0)$.

b) Pour $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy^2(x^2+y^2)-x^2y^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

— En $(0,0)$: $f(h,0)=0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

c) $|2xy^4|\leq 2r\cdot r^4$, donc $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leq\frac{2r^5}{r^4}=2r\to 0$: continuité en $(0,0)$. Par symétrie des rôles de x et y, même conclusion pour $\frac{\partial f}{\partial y}$: f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse. $f_x=\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$, $|f_x|\leq 2r$: f est C^1.

Correction de l'exercice 6 – Approximation affine

a) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$: $\nabla f(3,4)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

b) DL d'ordre 1 (f est C^1 hors de l'origine) avec $h=0{,}02$, $k=-0{,}03$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f(3+h,4+k) \approx 5 + \frac{3}{5}h + \frac{4}{5}k = 5 + 0{,}012 - 0{,}024 = 4{,}988$$

— Écart avec la valeur exacte : $1{,}2 \times 10^{-4}$, de l'ordre de $\|(h,k)\|^2 = 1{,}3 \times 10^{-3}$ divisé par $2f$.

c) $\Delta f \approx \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} \cdot (\Delta x, \Delta y)$: seule la composante **radiale** du déplacement change la distance au premier ordre ; un déplacement tangent au cercle ne la change qu'au second ordre.

Réponse. $\nabla f(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$; $\sqrt{3{,}02^2 + 3{,}97^2} \approx 4{,}988$.

Correction de l'exercice 7 – Propagation des incertitudes

a) $V = 250\pi \approx 785{,}4$ cm³. Différentielle :

$$\Delta V \approx \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|\Delta r + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|\Delta h = 2\pi r h\,\Delta r + \pi r^2\,\Delta h$$

— $= 2\pi \times 50 \times 0{,}1 + \pi \times 25 \times 0{,}2 = 10\pi + 5\pi = 15\pi \approx 47$ cm³.

b) On divise par $V = \pi r^2 h$: $\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h} = 0{,}04 + 0{,}02 = 6\,\%$. (Dérivée logarithmique : $\ln V = \ln \pi + 2\ln r + \ln h$.)

c) Le rayon : son erreur relative (2 %) compte **double** car il intervient au carré, et contribue pour 4 % sur les 6 %.

Réponse. $V \approx 785$ cm³, $\Delta V \approx 47$ cm³ (6 %) ; améliorer la mesure de r.

Correction de l'exercice 8 – Une fonction harmonique

a) Si $x_0 > 0$, le disque de centre (x_0, y_0) et de rayon x_0 est inclus dans U : U est ouvert. f est composée de fonctions C^∞ sur U.

b) Avec $\arctan'(u) = \frac{1}{1+u^2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1 + y^2/x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

— $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ ✓ (Schwarz).

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$: somme nulle. En polaires ($x > 0$), $f = \theta$, l'angle polaire : une fonction harmonique (potentiel d'un tourbillon en mécanique des fluides).

Réponse. $\nabla f = \frac{(-y, x)}{x^2+y^2}$, $\Delta f = 0$; $f = \theta$ en polaires.

Correction de l'exercice 9 – Dérivées partielles sans approximation affine

a) Composée de fonctions continues. $f(h,0) = 0$ et $f(0,h) = 0$: les deux taux d'accroissement sont nuls.

b) Le développement serait $f(h,k) = 0 + 0\cdot h + 0 \cdot k + o(\|(h,k)\|)$. Or

$$\frac{f(t,t)}{\|(t,t)\|} = \frac{|t|}{\sqrt{2}\,|t|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \not\to 0$$

— contradiction.

c) Une fonction C^1 admet un développement d'ordre 1 en tout point (cours). Donc f n'est pas C^1 au voisinage de $(0,0)$, bien que continue et admettant des dérivées partielles en ce

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

point.

Réponse. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ mais $f(t,t) = |t| \neq o(|t|)$: pas de DL d'ordre 1.

Correction de l'exercice 10 – Ouverts du plan

a) Soit $(a,b) \in P$ et $r = a > 0$. Si $\|(x,y) - (a,b)\| < a$, alors $|x - a| < a$, donc $x > 0$: le disque ouvert de centre (a,b) et de rayon a est inclus dans P.

b) $(0,0) \in F$, mais tout disque centré en $(0,0)$ contient $(-\varepsilon, 0) \notin F$.

c) Soit $M_0 \in D$, $\|M_0\| < 1$, et $\rho = 1 - \|M_0\| > 0$. Si $\|M - M_0\| < \rho$:

$$\|M\| \leq \|M_0\| + \|M - M_0\| < \|M_0\| + \rho = 1$$

— donc le disque de centre M_0 et de rayon ρ est inclus dans D.

d) Pour calculer $\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$, il faut que $(a+h,b)$ reste dans le domaine pour h petit, **des deux côtés** : c'est garanti si un disque autour de (a,b) est inclus dans le domaine.

Réponse. P et D ouverts (disques explicites) ; F non ouvert.

Correction de l'exercice 11 – Dérivée partielle nulle et domaine

a) À y fixé, $x \mapsto f(x,y)$ a une dérivée nulle sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$: elle est constante. Donc $f(x,y) = f(0,y) = g(y)$, avec g de classe C^1 ($g' = \frac{\partial f}{\partial y}(0,\cdot)$).

b) Sur l'ouvert $\{x > 0, y > 0\}$, $f = y^2$; sur $\{x < 0\}$ et sur $\{y < 0\}$, $f = 0$. Le long de $\{x > 0, y = 0\}$, les deux expressions se raccordent en valeur (0) et en dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\big|_{y=0} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ partout}$$

— f est donc C^1 sur U.

c) Non : $f(1,1) = 1$ et $f(-1,1) = 0$. La droite horizontale $y = 1$ est coupée par la demi-droite retirée : on ne peut pas aller de $(-1,1)$ à $(1,1)$ **horizontalement** dans U. Le résultat de a) exige que chaque section horizontale du domaine soit un intervalle.

Réponse. Sur $\mathbb{R}^2$: $f = g(y)$; sur U non : $f(1,1) \neq f(-1,1)$.

Correction de l'exercice 12 – Dérivées croisées différentes

a) Pour $y \neq 0$: $\frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \frac{y(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} \to \frac{-y^3}{y^2} = -y$; et pour $y = 0$, $f(h,0) = 0$ donne $0 = -0$. De même $\frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \frac{x(x^2 - h^2)}{x^2 + h^2} \to x$.

b) On dérive ces fonctions d'une variable :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = -1, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = 1$$

— Les dérivées croisées sont **différentes** (contrôle numérique par différences finies : $-0{,}9998$ et $0{,}9998$).

c) Schwarz exige f de classe C^2 : ici les dérivées secondes croisées ne sont pas continues en $(0,0)$ (en polaires, elles dépendent de θ sans facteur r).

Réponse. $\partial_y \partial_x f(0,0) = -1 \neq 1 = \partial_x \partial_y f(0,0)$.

Correction de l'exercice 13 – Calcul de dérivées partielles

On dérive par rapport à une variable, l'autre étant **fixée** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Produit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{xy}(y\sin(x+y)+\cos(x+y)), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{xy}(x\sin(x+y)+\cos(x+y))$$

b) $g = \mathrm{e}^{y\ln x}$: $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y}{x}x^y = yx^{y-1}$ (puissance à exposant fixe) ; $\frac{\partial g}{\partial y} = x^y\ln x$ (exponentielle de base fixe). En $(\mathrm{e},1)$: 1 et e.

c) Théorème fondamental, Φ primitive de e^{-t^2}, $h = \Phi(y)-\Phi(x)$: $\frac{\partial h}{\partial x} = -\mathrm{e}^{-x^2}$, $\frac{\partial h}{\partial y} = \mathrm{e}^{-y^2}$.

Réponse. b) $g_x = yx^{y-1}$, $g_y = x^y\ln x$; c) $h_x = -\mathrm{e}^{-x^2}$, $h_y = \mathrm{e}^{-y^2}$.

Correction de l’exercice 14 – Fonctions partielles continues, fonction discontinue

a) Pour $y_0 \neq 0$, $x \mapsto \frac{2xy_0^2}{x^2+y_0^4}$ est une fraction rationnelle sans pôle réel ; pour $y_0 = 0$, c’est la fonction nulle. Même raisonnement en y (pour $x_0 = 0$, fonction nulle).

b) Pour $a \neq 0$: $\frac{f(ta,tb)}{t} = \frac{2ab^2}{a^2+t^2b^4} \to \frac{2b^2}{a}$. Pour $a = 0$: $f(0,tb) = 0$, limite 0. Toutes les dérivées directionnelles existent.

c) Le long de la parabole $x = y^2$:

$$f(y^2,y) = \frac{2y^4}{y^4+y^4} = 1 \to 0$$

— f n’est pas continue en $(0,0)$, bien qu’elle ait des dérivées dans **toutes** les directions.

Réponse. Dérivées directionnelles $\frac{2b^2}{a}$ (ou 0), mais $f(y^2,y) = 1$: discontinue.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : une fonction continue mais pas C¹

a) Hors de l’origine, quotient de fonctions continues. En $(0,0)$: $\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$, donc $|f| \leq |x| \leq r \to 0$.

b) $f(h,0) = 0$ et $f(0,h) = 0$: les deux dérivées partielles sont nulles, $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

c) $f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = t\cos\alpha\sin^2\alpha$, donc

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(tu)}{t} = \cos\alpha\sin^2\alpha$$

— non nul pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($\frac{1}{2\sqrt{2}}$), alors que $\nabla f(0,0)\cdot u = 0$.

d) Si $f(h,k) = 0+0h+0k+o(\|(h,k)\|)$, on aurait $D_u f(0,0) = 0$ pour tout u : contradiction. Pas de DL d’ordre 1, donc f n’est pas C^1 (en effet $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ vaut 1 sur l’axe des ordonnées et n’est pas continue en $(0,0)$).

Réponse. f continue, $\nabla f(0,0) = 0$, mais $D_u f(0,0) = \cos\alpha\sin^2\alpha$: pas C^1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).