Plaquette 3 – Règle de la chaîne, changements de variables et équations aux dérivées partielles

Fonctions de deux variables — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Règle de la chaîne : si $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$,

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}$$

— **EDP de base** sur un ouvert convexe : $\frac{\partial g}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow g(u,v) = \varphi(u)$;
$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \Leftrightarrow g = \varphi(u) + \psi(v)$.

— **Polaires** : $r\frac{\partial g}{\partial r} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$.

— **Homogénéité** : $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ pour $t>0 \Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$ (Euler).

— **Dérivée seconde le long d'une droite** :
$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(a+th, b+tk) = h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}$.

Correction de l'exercice 1 – Dériver le long d'une courbe

a) $\nabla f = (2xy, x^2)$ et $(x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t)$:

$$g'(t) = -\sin t \cdot 2\cos t \sin t + \cos t \cdot \cos^2 t = \cos t\left(\cos^2 t - 2\sin^2 t\right)$$

b) $g(t) = \cos^2 t \sin t$, $g'(t) = -2\cos t \sin^2 t + \cos^3 t$ ✓.

c) $g'(t) = 0$: $\cos t = 0$ ($g = 0$) ou $\tan^2 t = \frac{1}{2}$. Le maximum est atteint pour $\sin t = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$, $\cos^2 t = \frac{2}{3}$: $g = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}385$, aux points $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Réponse. $g'(t) = \cos t(\cos^2 t - 2\sin^2 t)$; maximum $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ en $\left(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}\right)$.

Correction de l'exercice 2 – Fonctions radiales

a) Règle de la chaîne avec $u = x^2 + y^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,\varphi'(x^2+y^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,\varphi'(x^2+y^2)$$

b) $y \cdot 2x\varphi' - x \cdot 2y\varphi' = 0$.

c) $\nabla f = 2\varphi'(x^2+y^2)\,(x,y)$. Les lignes de niveau sont des **cercles** centrés en O ; le gradient, normal à ces cercles, est donc **radial**. (La réciproque, traitée dans la plaquette 1 en polaires : l'équation $yf_x - xf_y = 0$ caractérise les fonctions radiales.)

Réponse. $\nabla f = 2\varphi'(x^2+y^2)(x,y)$; $yf_x - xf_y = 0$.

Correction de l'exercice 3 – Une EDP d'ordre 1 par changement linéaire

a) $f(x,y) = g(x+y, x-y)$; règle de la chaîne :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}$$

b) L'EDP devient $2\frac{\partial g}{\partial v} = 0$. Le changement est une bijection de $\mathbb{R}^2$; à u fixé, $v \mapsto g(u,v)$ est constante sur $\mathbb{R}$: $g(u,v) = \varphi(u)$ avec φ de classe C^1. Donc $f(x,y) = \varphi(x+y)$.

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'(x+y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ ✓. f est constante sur les droites $x+y=c$, dirigées par $(1,-1)$: l'EDP dit exactement que la dérivée de f selon $(1,-1)$ est nulle.

Réponse. $f(x,y) = \varphi(x+y)$, φ de classe C^1 quelconque.

Correction de l'exercice 4 – EDP avec second membre

a) Comme dans l'exercice précédent, $f_x = g_u + g_v$ et $f_y = g_u - g_v$, donc

$$f_x + f_y = 2\frac{\partial g}{\partial u} = u$$

b) À v fixé : $g(u,v) = \frac{u^2}{4} + \psi(v)$, ψ de classe C^1. Donc $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{4} + \psi(x-y)$.

c) $f(x,0) = \frac{x^2}{4} + \psi(x) = 0$ pour tout x : $\psi(s) = -\frac{s^2}{4}$. Alors

— $f(x,y) = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} = xy$. Vérification : $f_x + f_y = y + x$ ✓ et $f(x,0) = 0$ ✓.

Réponse. $f = \frac{(x+y)^2}{4} + \psi(x-y)$; avec $f(x,0)=0$: $f(x,y) = xy$.

Correction de l'exercice 5 – Équation de transport

a) $c(x,t) = g(x-vt,t)$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -v\frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \xi}$$

— donc $c_t + v c_x = \frac{\partial g}{\partial \tau} = 0$.

b) $g(\xi,\tau) = \varphi(\xi)$, soit $c(x,t) = \varphi(x-vt)$; en $t=0$, $\varphi = c_0$.

c) $c(x,5) = \mathrm{e}^{-(x-10)^2}$: maximum en $x = 10$ m. Le profil est **translaté** sans déformation à la vitesse v : c'est une onde progressive.

Réponse. $c(x,t) = c_0(x-vt)$; maximum en $x = 10$ m à $t = 5$ s.

Correction de l'exercice 6 – Équation des ondes

a) $f_x = g_u + g_v$, $f_y = g_u - g_v$. En dérivant encore (Schwarz, g de classe C^2) :

$$f_{xx} = g_{uu} + 2g_{uv} + g_{vv}, \qquad f_{yy} = g_{uu} - 2g_{uv} + g_{vv}$$

— d'où $f_{xx} - f_{yy} = 4g_{uv}$.

b) $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = 0$: $\frac{\partial g}{\partial v} = \chi(v)$, puis $g = \varphi(u) + \psi(v)$. Donc $f(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$: superposition de deux ondes allant en sens opposés.

c) $\varphi(x) + \psi(x) = \sin x$ et $\varphi'(x) - \psi'(x) = 0$: $\varphi - \psi$ est constante, qu'on peut prendre nulle. $\varphi = \psi = \frac{\sin}{2}$ et

— $f(x,y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} = \sin x \cos y$: une **onde stationnaire**.

Réponse. $f = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$; c) $f(x,y) = \sin x \cos y$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – EDP en coordonnées polaires

a) $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\, f_x + \sin\theta\, f_y$, et l'on multiplie par r : $x f_x + y f_y$.

b) L'équation devient $r\frac{\partial g}{\partial r} = r$, soit $\frac{\partial g}{\partial r} = 1$:

$$g(r,\theta) = r + h(\theta), \qquad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + h(\theta(x,y))$$

— avec h de classe C^1 quelconque sur $]-\pi,\pi[$.

c) Sur le cercle unité, $f = 1 + h(\theta)$ constante : h constante, et $f(1,0) = 1 + h = 0$ donne $h = -1$. Donc $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 1$ (qui se prolonge d'ailleurs à tout U).

Réponse. $f = \sqrt{x^2+y^2} + h(\theta)$; c) $f = \sqrt{x^2+y^2} - 1$.

Correction de l'exercice 8 – Identité d'Euler

a) On dérive $t \mapsto f(tx,ty)$ par la règle de la chaîne et $t \mapsto t^\alpha f(x,y)$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$$

— puis $t = 1$.

b) $x^3 + xy^2$: degré 3 ; $x(3x^2+y^2) + y(2xy) = 3x^3 + 3xy^2$ ✓. $\frac{xy}{x+y}$: degré 1 ; $f_x = \frac{y^2}{(x+y)^2}$, $f_y = \frac{x^2}{(x+y)^2}$, et $\frac{xy^2 + yx^2}{(x+y)^2} = \frac{xy}{x+y}$ ✓.

c) $P(tK,tL) = t^{a+b}P$: rendements constants si et seulement si $a + b = 1$. Euler : $K\frac{\partial P}{\partial K} + L\frac{\partial P}{\partial L} = P$: si chaque facteur est rémunéré à sa productivité marginale, la production est **exactement** répartie entre capital et travail.

Réponse. $x f_x + y f_y = \alpha f$; Cobb-Douglas : rendements constants si $a + b = 1$.

Correction de l'exercice 9 – Laplacien d'une fonction radiale

a) $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$, donc $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r}g'(r)$. Puis, en dérivant le produit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)g'(r) + \frac{x^2}{r^2}g''(r)$$

b) Même calcul en y, puis somme avec $x^2 + y^2 = r^2$: $\Delta f = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right)g' + g'' = g'' + \frac{g'}{r}$.

c) $g'' + \frac{g'}{r} = 0 \Leftrightarrow (rg')' = 0 \Leftrightarrow rg' = a \Leftrightarrow g = a\ln r + b$. Les fonctions radiales harmoniques sont $a\ln\sqrt{x^2+y^2} + b$ (potentiel créé par un fil chargé, en électrostatique plane).

Réponse. $\Delta f = g'' + \frac{g'}{r}$; radiales harmoniques : $a\ln r + b$.

Correction de l'exercice 10 – Dériver t puissance t

a) $\frac{\partial F}{\partial x} = y x^{y-1}$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = x^y \ln x$.

b) Pour $h(t) = F(u(t),v(t))$:

$$h'(t) = u'(t)\frac{\partial F}{\partial x} + v'(t)\frac{\partial F}{\partial y}$$

— avec $u = v = t$: $(t^t)' = t\cdot t^{t-1} + t^t \ln t = t^t(1 + \ln t)$. Directement : $t^t = \mathrm{e}^{t\ln t}$, de dérivée $(\ln t + 1)\mathrm{e}^{t\ln t}$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $u = t$, $v = \sin t$: $(t^{\sin t})' = \sin t \cdot t^{\sin t - 1} + \cos t \cdot t^{\sin t} \ln t$. $u = \ln t$, $v = t$: $((\ln t)^t)' = \frac{1}{t} \cdot t(\ln t)^{t-1} + (\ln t)^t \ln(\ln t) = (\ln t)^{t-1} + (\ln t)^t \ln \ln t$.

Réponse. $(t^t)' = t^t(1 + \ln t)$.

Correction de l'exercice 11 – Changement de variables multiplicatif

a) $f(x, y) = g(xy, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

b) $xf_x - yf_y = xy\,g_u - xy\,g_u - y\,g_v = -y\frac{\partial g}{\partial v} = 0$, donc $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$ sur U, dont les sections $\{u\} \times \mathbb{R}_+^*$ sont des intervalles : $g(u, v) = \varphi(u)$, et $f(x, y) = \varphi(xy)$.

c) f est constante sur les **hyperboles** $xy = c$. Vérification : $x \cdot y\varphi'(xy) - y \cdot x\varphi'(xy) = 0$ ✓.

Réponse. $f(x, y) = \varphi(xy)$.

Correction de l'exercice 12 – Conservation de l'énergie

a) $\frac{\partial E}{\partial x} = \omega^2 x$, $\frac{\partial E}{\partial v} = v$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = x' \cdot \omega^2 x + v' \cdot v = v\omega^2 x + (-\omega^2 x)v = 0$$

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \theta' \cdot \frac{g}{\ell}\sin\theta + \omega' \cdot \omega = \omega\frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{g}{\ell}\sin\theta\,\omega = 0$ (avec $\omega = \theta'$).

c) E constante : $\frac{1}{2}\omega^2 - \frac{g}{\ell}\cos\theta = -\frac{g}{\ell}\cos\theta_0$. Maximum en $\theta = 0$: $\omega_{\max}^2 = \frac{2g}{\ell}(1 - \cos 60°) = \frac{g}{\ell} = 9{,}81$, soit $\omega_{\max} \approx 3{,}13$ rad/s (vitesse 3,13 m/s au point bas).

Réponse. $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$; $\omega_{\max} = \sqrt{2g(1 - \cos\theta_0)/\ell} \approx 3{,}13$ rad/s.

Correction de l'exercice 13 – Relations entre dérivées partielles d'un gaz

a) $P = \frac{RT}{V}$: $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}$. $V = \frac{RT}{P}$: $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P}$. $T = \frac{PV}{R}$: $\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{R}$.

b) Le produit vaut

$$-\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{P} \cdot \frac{V}{R} = -\frac{RT}{PV} = -1$$

— Chaque dérivée est prise en fixant une variable **différente** : on ne peut pas « simplifier » les ∂V comme des fractions. (La relation vaut pour toute équation d'état $\Phi(P, V, T) = 0$.)

c) $\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{RT}{P^2}$, donc $\chi = \frac{1}{V} \cdot \frac{RT}{P^2} = \frac{1}{P}$.

Réponse. Produit $= -1$; $\chi = \frac{1}{P}$.

Correction de l'exercice 14 – Dérivée seconde le long d'une droite

a) $\varphi'(t) = hf_x + kf_y$ (règle de la chaîne), puis on redérive chaque terme de la même façon et on utilise Schwarz ($f_{xy} = f_{yx}$) :

$$\varphi''(t) = h(hf_{xx} + kf_{xy}) + k(hf_{yx} + kf_{yy}) = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}$$

b) $\varphi(t) = t^3$, $\varphi''(t) = 6t$. Et $f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 2x$, $f_{yy} = 0$ en (t, t) : $2t + 4t + 0 = 6t$ ✓.

c) $h^2A + 2hkB + k^2C$ est un trinôme en h (ou en k) de discriminant réduit $k^2(B^2 - AC) \le 0$, avec $A \ge 0$: il est positif. Donc $\varphi'' \ge 0$: φ est convexe, pour toute droite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\varphi'' = h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une solution de l'équation de la chaleur

a) $u = t^{-1/2} \mathrm{e}^{-x^2/4t}$. Dérivée en t (produit) : $\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\right) u$. En x : $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{2t} u$, puis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{2t} u + \frac{x^2}{4t^2} u = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\right) u$$

b) Les deux expressions coïncident.

c) Maximum en $x = 0$, égal à $\frac{1}{\sqrt{t}}$; $u = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ pour $\frac{x^2}{4t} = \ln 2$, soit $x = \pm 2\sqrt{t \ln 2}$. Quand t augmente, le pic **s'abaisse** en $\frac{1}{\sqrt{t}}$ et **s'élargit** en $\sqrt{t}$.

d) La quantité totale de chaleur (ou de soluté) se conserve : elle diffuse en s'étalant, la hauteur et la largeur variant en sens inverses. La largeur en $\sqrt{t}$ est la signature de la **diffusion** (contre vt pour le transport).

Réponse. $u_t = u_{xx} = \left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right) u$; pic $\frac{1}{\sqrt{t}}$, largeur $\propto \sqrt{t}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).