Plaquette 1 – Dérivées partielles, gradient et recherche d'extremums

Fonctions de deux variables — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On calcule des **dérivées partielles** en traitant l'autre variable comme une constante, on écrit le **gradient** et le développement d'ordre 1, on cherche les **points critiques** puis on conclut à l'aide de la nature de la forme quadratique.

Exercice 1 – Dérivées partielles

Soit $f(x,y) = x^2y + 3xy^3$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 2 – Dérivées partielles d'un quotient

Soit $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calculer les deux dérivées partielles.

Exercice 3 – Gradient et plan tangent

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. Déterminer $\nabla f(1,2)$ puis l'équation du plan tangent au graphe en ce point.

Exercice 4 – Théorème de Schwarz

Soit $f(x,y) = x^3y^2 + \mathrm{e}^{xy}$. Vérifier que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Exercice 5 – Règle de la chaîne

Soit $f(x,y) = x^2 + xy$ et $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. Calculer $g'(t)$ de deux façons.

Exercice 6 – Points critiques

Déterminer les points critiques de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7$.

Exercice 7 – Point col

Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$. Montrer que $(0,0)$ est un point critique qui n'est pas un extremum.

Exercice 8 – Extremum sous contrainte

Déterminer le minimum de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $x + y = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Fonction homogène

Soit $f(x,y) = x^3 + 2xy^2$. Vérifier la relation d'Euler

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 3f(x,y)$$

Exercice 10 – Continuité en deux variables

Soit $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 11 – Problème d'optimisation concret

On veut fabriquer une boîte parallélépipédique **sans couvercle** de volume 32 dm^3. Déterminer les dimensions minimisant la surface de matériau.

Exercice 12 – Dérivée selon un vecteur

Soit $f(x,y) = x^2y$ et $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

a) Calculer la dérivée de f en $(1,2)$ selon u par la définition $\lim_{t\to 0} \dfrac{f((1,2)+tu) - f(1,2)}{t}$.

b) Retrouver le résultat avec le gradient.

c) Dans quelle direction unitaire la dérivée est-elle maximale ? Que vaut-elle alors ?

Exercice 13 – Coordonnées polaires

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Exprimer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles de f.

b) Vérifier sur $f(x,y) = x^2+y^2$ et sur $f(x,y) = xy$.

c) En déduire que f est radiale (f ne dépend que de x^2+y^2) si et seulement si $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

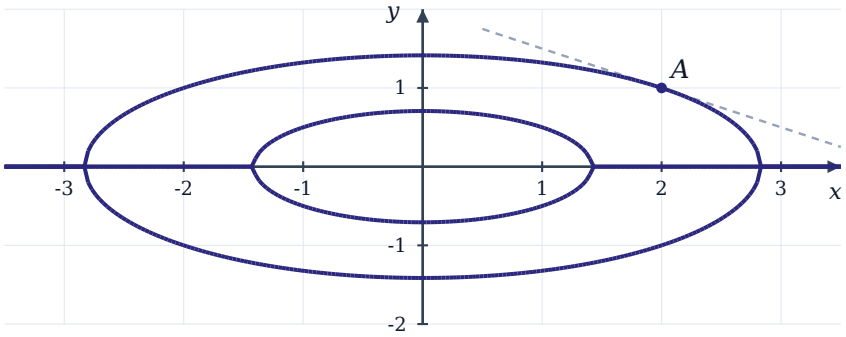
Exercice 14 – Lignes de niveau et gradient

Soit $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

a) Décrire les lignes de niveau $f(x, y) = c$ pour $c > 0$.

b) Calculer $\nabla f(2, 1)$ et l'équation de la tangente en $(2, 1)$ à la ligne de niveau qui passe par ce point.

c) Vérifier que le gradient est orthogonal à cette tangente.



Lignes de niveau $c = 2$ et $c = 8$, tangente $x + 2y = 4$ en $A(2, 1)$

Exercice 15 – Synthèse : extremums d'une fonction de deux variables

Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

a) Déterminer les points critiques.

b) Étudier la nature de chacun.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).