Plaquette 5 – Extremums et optimisation

Fonctions de deux variables — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Sur un ouvert : un extremum local d'une fonction C^1 est un **point critique** ($\nabla f = 0$). On trouve les points critiques, puis on étudie le **signe de** $f(a+h, b+k) - f(a,b)$: mise sous forme de somme de carrés, restriction à des droites ou à des courbes (pour montrer qu'un point est un col). **Sur une partie fermée bornée** (disque, carré, triangle), f continue atteint son maximum et son minimum : on compare les valeurs aux points critiques **intérieurs** et les extremums sur le **bord** (paramétré, donc ramené à une variable). **Sous contrainte**, on élimine une variable grâce à la contrainte.

Exercice 1 – Minimum par complétion du carré

Soit $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2xy - 2y + 5$.

a) Déterminer les points critiques.

b) Écrire f comme somme de carrés plus une constante. Conclure sur la nature du point critique.

c) Décrire les lignes de niveau.

Exercice 2 – Un col et deux minimums

Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

a) Déterminer les points critiques.

b) Montrer que $(0,0)$ est un point col (étudier $f(t,t)$ et $f(t,-t)$).

c) Vérifier que $f(x,y) + 2 = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy-1)^2$ et conclure pour les deux autres points critiques.

Exercice 3 – Extremums sur un disque

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - x$ sur le disque fermé $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.

b) Étudier les points critiques intérieurs.

c) Étudier f sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$ (paramétrer par x).

d) Conclure.

Exercice 4 – Droite des moindres carrés

On dispose des points $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,4)$ et l'on cherche la droite $y = ax + b$ minimisant $S(a,b) = \sum_{i=1}^{4} (y_i - ax_i - b)^2$.

a) Écrire le système $\nabla S = 0$ (équations normales).

b) Le résoudre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Calculer S minimal et vérifier que la droite passe par le point moyen.

Exercice 5 – Boîte de surface minimale

On veut fabriquer une boîte parallélépipédique **sans couvercle** de volume 32 dm³, avec le moins de carton possible.

a) Avec x, y les côtés du fond et z la hauteur, montrer que la surface vaut $S(x,y) = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}$.

b) Trouver le point critique sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

c) Justifier que c'est un minimum global (on admettra que $S \to +\infty$ au bord du domaine et à l'infini). Donner les dimensions.

Exercice 6 – Distance d'un point à un plan

On cherche le point du plan $P : x + 2y + 2z = 9$ le plus proche de l'origine.

a) Exprimer z et montrer qu'il s'agit de minimiser $g(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{(9 - x - 2y)^2}{4}$.

b) Trouver le point critique de g.

c) En déduire la distance de O à P et comparer à la formule $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exercice 7 – Produit maximal à somme fixée

On cherche le maximum de xyz pour $x, y, z \geq 0$ et $x + y + z = 12$.

a) Montrer qu'il s'agit de maximiser $f(x,y) = xy(12 - x - y)$ sur le triangle fermé $T = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 12\}$.

b) Justifier l'existence du maximum et montrer qu'il n'est pas atteint sur le bord.

c) Trouver le point critique intérieur et conclure. Retrouver le résultat par l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 8 – Maximiser un profit

Une entreprise fabrique x et y milliers d'unités de deux produits ; son profit (en k€) est $P(x,y) = 20x + 30y - x^2 - xy - y^2$.

a) Déterminer le point critique de P.

b) Montrer que c'est un maximum global en écrivant $x^2 + xy + y^2$ comme somme de carrés.

c) Donner la production optimale et le profit maximal.

Exercice 9 – Quand le premier ordre ne suffit pas

Les trois fonctions suivantes ont $(0,0)$ pour unique point critique et la même « partie quadratique » x^2. Déterminer dans chaque cas la nature de $(0,0)$.

a) $f(x,y) = x^2 + y^4$;

b) $g(x,y) = x^2 - y^4$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $h(x,y) = x^2 + y^3$.

Exercice 10 – Fonction radiale : cercle de maximums

Soit $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

a) Écrire $f = \varphi(x^2+y^2)$ et étudier $\varphi(u) = u\,\mathrm{e}^{-u}$ sur $[0,+\infty[$.

b) En déduire les extremums globaux de f et les points où ils sont atteints.

c) Calculer ∇f et vérifier que tous ces points sont critiques. Les maximums sont-ils stricts ?

Exercice 11 – Triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle

Un triangle est inscrit dans le cercle de rayon 1 ; on note a, b, $c = 2\pi - a - b$ les angles au centre interceptant ses côtés.

a) Montrer que son aire vaut $A = \frac{1}{2}(\sin a + \sin b + \sin c) = \frac{1}{2}(\sin a + \sin b - \sin(a+b))$.

b) Chercher les points critiques de $g(a,b) = \sin a + \sin b - \sin(a+b)$ sur $\{a>0, b>0, a+b<2\pi\}$.

c) Conclure (on justifiera l'existence du maximum sur le triangle fermé et on remarquera que $g = 0$ sur le bord).

Exercice 12 – Extremums sur un carré

Soit $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x$ sur le carré $K = [0,1]^2$.

a) Déterminer le point critique intérieur et la valeur de f en ce point.

b) Étudier f sur chacun des quatre côtés du carré.

c) En déduire le maximum et le minimum de f sur K.

Exercice 13 – Répartir un budget

Un consommateur dispose de 90 € pour acheter deux biens aux prix 2 € et 3 €. Sa satisfaction est $U(x,y) = x^{1/3}y^{2/3}$ ($x, y \geq 0$ quantités achetées).

a) Écrire la contrainte budgétaire et se ramener à maximiser une fonction de y seul.

b) Trouver l'optimum. Quelle part du budget va à chaque bien ?

c) Vérifier que, à l'optimum, $\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = \frac{2}{3}$ (rapport des prix). Interpréter géométriquement (ligne de niveau de U et droite de budget).

Exercice 14 – Point critique non isolé et bord

Soit $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y-2)^4$.

a) Montrer que $f \geq 0$ et déterminer l'ensemble des points où $f = 0$.

b) Calculer ∇f et retrouver ce point.

c) Sur le disque fermé de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, déterminer le minimum de f. Où est-il atteint : à l'intérieur ou sur le bord ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : où implanter un entrepôt ?

Trois magasins sont situés en $A_1(0,0)$, $A_2(6,0)$, $A_3(0,9)$ (en km). On veut implanter un entrepôt en $M(x,y)$.

a) On minimise $F(M) = \sum_{i=1}^{3} MA_i^2$. Calculer ∇F et montrer que le minimum est atteint au **centre de gravité** G du triangle.

b) Montrer que $F(M) = F(G) + 3MG^2$ et calculer $F(G)$.

c) Les magasins sont livrés 1, 2 et 3 fois par semaine. On minimise $\sum w_i MA_i^2$ avec $w = (1,2,3)$. Où placer l'entrepôt ?

d) Minimiser plutôt la somme des distances $\sum MA_i$ conduit au point de Fermat, sans formule simple. Pourquoi les carrés facilitent-ils le calcul ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).