Plaquette 4 – Gradient, lignes de niveau et plan tangent

Fonctions de deux variables — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Le **gradient** $\nabla f(a,b)$ est le vecteur qui porte toute l'information du premier ordre : dérivée selon $u = \nabla f \cdot u$, direction de **plus forte croissance** $= \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$, pente maximale $= \|\nabla f\|$. Il est **orthogonal** aux lignes de niveau : la tangente à la courbe $f(x,y) = c$ en un point où $\nabla f \neq 0$ a pour équation $\nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b) = 0$. Le **plan tangent** au graphe $z = f(x,y)$ est le graphe de l'approximation affine. Pour reconnaître un **champ de gradients** (P,Q), la condition nécessaire est $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (Schwarz), puis on intègre.

Exercice 1 – Plan tangent à un paraboloïde

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$.

a) Donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1,2,5)$.

b) En déduire une valeur approchée de $f(1{,}1\,;1{,}9)$ et comparer à la valeur exacte.

c) Montrer que le graphe est au-dessus de chacun de ses plans tangents.

Exercice 2 – Plan tangent à une sphère

La sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ contient le point $A(1,2,2)$.

a) Près de A, la sphère est le graphe de $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Calculer $\nabla g(1,2)$.

b) En déduire l'équation du plan tangent en A et vérifier qu'il est orthogonal au rayon $\overrightarrow{OA}$.

c) Quelle est la distance de l'origine à ce plan ?

Exercice 3 – Pourquoi le gradient est normal aux lignes de niveau

Soit f de classe C^1 et $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe dérivable tracée sur la ligne de niveau $f = c$.

a) En dérivant $t \mapsto f(\gamma(t))$, montrer que $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$.

b) Vérifier sur $f(x,y) = x^2 + y^2$ et le cercle $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$.

c) Vérifier sur $f(x,y) = y - x^2$ et la parabole $\gamma(t) = (t, t^2 + 1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

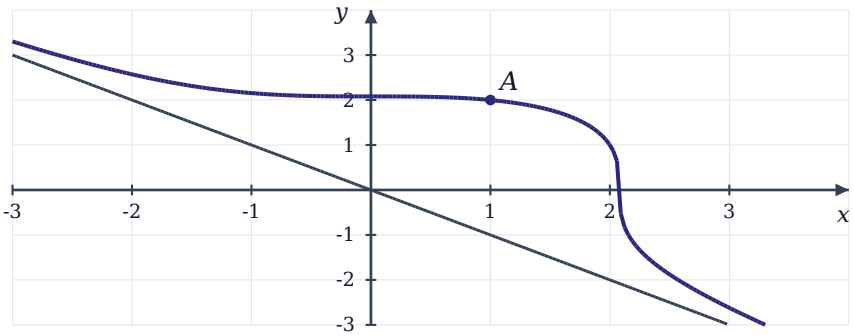
Exercice 4 – Tangente à une courbe implicite

On considère la courbe C d'équation $x^3 + y^3 = 9$.

a) Vérifier que $A(1, 2) \in C$ et donner l'équation de la tangente en A.

b) En quels points de C la tangente est-elle horizontale ? verticale ?

c) Montrer que la droite $y = -x$ est asymptote à C (écrire $y = \sqrt[3]{9 - x^3}$ et développer en $\pm\infty$).



La courbe $x^3 + y^3 = 9$ et son asymptote $y = -x$

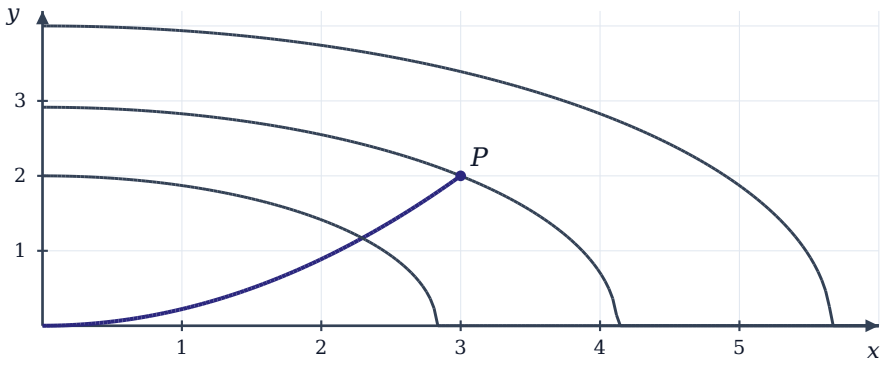
Exercice 5 – Direction de plus forte pente

L'altitude d'un terrain est $h(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$ (en m, x, y en hm).

a) Calculer $\nabla h(3, 2)$. Dans quelle direction faut-il partir pour monter le plus vite ? Quelle est alors la pente ?

b) Dans quelle direction peut-on partir sans changer d'altitude ?

c) Un randonneur suit à chaque instant la direction de plus forte pente : $(x'(t), y'(t)) = \nabla h(x(t), y(t))$. Résoudre et montrer que sa trajectoire est l'arc de parabole $y = \frac{2}{9}x^2$.



Lignes de niveau $h = 92, 83, 68$ et chemin de P au sommet (épais)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

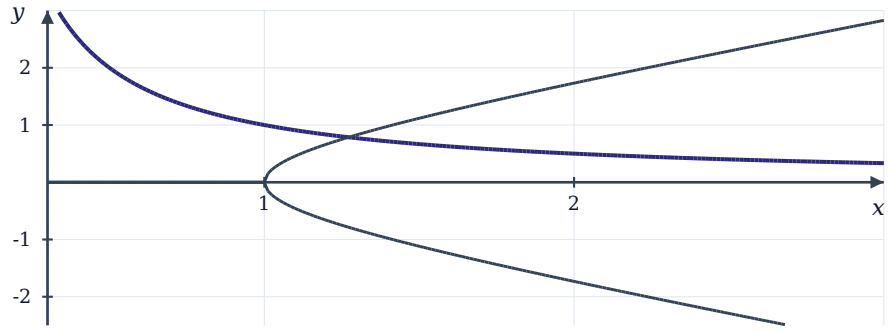
Exercice 6 – Familles orthogonales de courbes

Soit $f(x, y) = xy$ et $g(x, y) = x^2 - y^2$.

a) Décrire les lignes de niveau de f et de g.

b) Montrer que $\nabla f \cdot \nabla g = 0$ en tout point. En déduire qu'en tout point hors de l'origine, les lignes de niveau de f et de g qui s'y croisent sont orthogonales.

c) Relier à la fonction complexe $z \mapsto z^2$.



Hyperboles $xy = 1$ (épaisse) et $x^2 - y^2 = 1$

Exercice 7 – Potentiel et champ

En électrostatique plane, on considère le potentiel $V(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (unités arbitraires).

a) Calculer ∇V et le champ $\vec{E} = -\nabla V$.

b) Montrer que $\|\vec{E}\| = \dfrac{1}{r^2}$ et que $\vec{E}$ est radial.

c) Quelles sont les lignes équipotentielles ? Vérifier qu'elles sont orthogonales au champ.

Exercice 8 – Reconnaître un champ de gradients

a) Déterminer, si elle existe, une fonction f telle que $\nabla f = (2xy + 1,\ x^2 + 3y^2)$.

b) Montrer que $(y, -x)$ n'est le gradient d'aucune fonction de classe C^2.

c) Pour quelle valeur de a le champ $(ax\,\mathrm{e}^y,\ x^2\mathrm{e}^y)$ est-il un gradient ? Donner alors f.

Exercice 9 – Sensibilité de l'indice de masse corporelle

L'indice de masse corporelle est $I(m, h) = \dfrac{m}{h^2}$ (m en kg, h en m).

a) Calculer I et ∇I pour $m = 70$ kg et $h = 1{,}75$ m.

b) Estimer la variation de I pour une prise de 1 kg, puis pour une erreur de 1 cm sur la taille.

c) Quelle relation entre Δm et Δh laisse I inchangé au premier ordre ? Interpréter à l'aide des lignes de niveau.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Plan tangent horizontal

Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$.

a) En quel point le plan tangent au graphe est-il horizontal ?

b) Écrire f sous la forme $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \dots$ et en déduire que ce point est un minimum global.

c) Représenter l'allure des lignes de niveau.

Exercice 11 – Plan tangent de direction imposée

Soit S le paraboloïde $z = x^2 + y^2$.

a) En quel point de S le plan tangent est-il parallèle au plan $2x + 4y - z = 0$?

b) Donner l'équation de ce plan tangent.

c) Déterminer le minimum de l'écart vertical $x^2 + y^2 - (2x + 4y)$ entre S et le plan $z = 2x + 4y$.

Exercice 12 – Pas de plan tangent au sommet d'un cône

Soit $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (graphe : un cône).

a) Montrer que f n'admet pas de dérivée partielle en $(0,0)$.

b) Montrer que f admet en $(0,0)$ une dérivée selon tout vecteur unitaire u **dans un seul sens** : calculer $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(tu)}{t}$.

c) Conclure qu'il n'y a pas de plan tangent au sommet. Où le plan tangent existe-t-il, et que contient-il ?

Exercice 13 – Taux de variation d'une température

La température d'une plaque est $T(x,y) = 20 + 60\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ (°C, distances en dm). Une fourmi se trouve en $M(1,1)$.

a) Calculer $T(M)$ et $\nabla T(M)$.

b) La fourmi avance dans la direction du vecteur $(3,4)$. À quel rythme la température varie-t-elle (en °C/dm) ?

c) Dans quelle direction doit-elle partir pour se refroidir le plus vite ? Avec quel taux ?

Exercice 14 – Lignes de niveau et gradient nul

Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$.

a) Tracer l'allure des lignes de niveau $f = -1$, $f = 0$, $f = 1$.

b) Montrer que la ligne de niveau 0 n'est pas une courbe « lisse » en $(0,0)$. Quel est le lien avec $\nabla f(0,0)$?

c) Plus généralement, pourquoi exige-t-on $\nabla f(a,b) \neq 0$ pour parler de tangente à la ligne de niveau en (a,b) ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : une colline gaussienne

Une colline a pour altitude $h(x,y) = 500\,\mathrm{e}^{-(x^2+2y^2)}$ (en m, x, y en km). On se place en $P(1\,;0{,}5)$.

a) Calculer $h(P)$ et $\nabla h(P)$ (en m/km).

b) Quelle est la pente maximale en P (en % et en degrés) ? Dans quelle direction ?

c) Donner un vecteur directeur de la ligne de niveau passant par P.

d) Un ruisseau suit la ligne de plus grande pente, c'est-à-dire des courbes tangentes à ∇h. Montrer que ces courbes vérifient $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{2y}{x}$ et que celle qui passe par P est la parabole $y = \dfrac{x^2}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).