Plaquette 2 – Limites, continuité et fonctions de classe C^1

Fonctions de deux variables — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour une **limite en** $(0,0)$: majorer $|f(x,y)-\ell|$ par une fonction de $r=\sqrt{x^2+y^2}$ qui tend vers 0 (coordonnées polaires, inégalités $|x|\leq r$, $|xy|\leq \frac{r^2}{2}$). Pour prouver l'**absence de limite**, exhiber deux chemins (droites $y=mx$, paraboles $y=x^2$) donnant des limites différentes. Les **dérivées partielles** en un point « à problème » se calculent par la **définition** (taux d'accroissement d'une variable). Pour la **classe** C^1, montrer que ces dérivées partielles sont continues, y compris au point de raccord.

Exercice 1 – Limite par majoration

Montrer que les fonctions suivantes tendent vers 0 en $(0,0)$:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$;

b) $g(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

c) $h(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

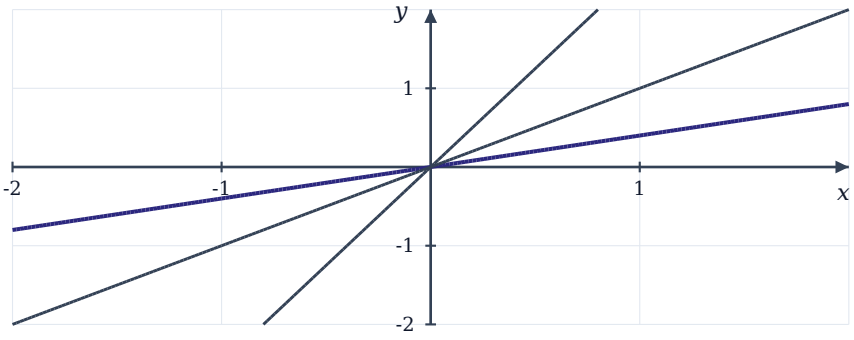
Exercice 2 – Absence de limite par les droites

Soit $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$.

a) Calculer $f(x,mx)$ pour $x\neq 0$ et conclure.

b) Écrire f en coordonnées polaires. Interpréter.

c) Les fonctions partielles $x\mapsto f(x,0)$ et $y\mapsto f(0,y)$ ont-elles une limite en 0 ?



Sur chaque droite $y=mx$, f est constante, égale à $m/(1+m^2)$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

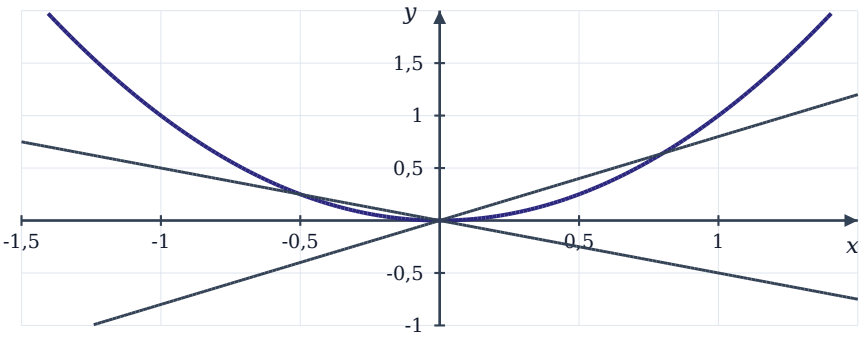
Exercice 3 – Un piège : toutes les droites donnent 0

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

a) Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine tend vers 0.

b) Calculer $f(x, x^2)$. Conclure.

c) Quelle leçon en tirer ?



Le long des droites $f \to 0$, le long de la parabole $y = x^2$, $f = 1/2$

Exercice 4 – Dérivées partielles sans continuité

Soit $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les calculer.

b) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

c) Quelle différence avec le cas des fonctions d'une variable ?

Exercice 5 – Prolongement de classe C^1

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en dehors de l'origine, puis en $(0,0)$.

c) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et conclure (par symétrie) que f est de classe C^1.

Exercice 6 – Approximation affine

Soit $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Calculer le gradient de f en $(3,4)$.

b) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{3{,}02^2 + 3{,}97^2}$ et la comparer à la valeur exacte 4,988116…

c) Interpréter géométriquement : de combien varie la distance à l'origine quand on se déplace de $(\Delta x, \Delta y)$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Propagation des incertitudes

On mesure le rayon $r = 5{,}0 \pm 0{,}1$ cm et la hauteur $h = 10{,}0 \pm 0{,}2$ cm d'un cylindre.

a) Calculer le volume $V = \pi r^2 h$ et, par l'approximation affine, majorer l'incertitude ΔV.

b) Montrer que l'incertitude relative vérifie $\dfrac{\Delta V}{V} \approx 2\dfrac{\Delta r}{r} + \dfrac{\Delta h}{h}$.

c) Quelle mesure faut-il améliorer en priorité ?

Exercice 8 – Une fonction harmonique

Soit $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ sur $U = \{(x,y) : x > 0\}$.

a) Montrer que U est un ouvert et que f est de classe C^2 sur U.

b) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et vérifier que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

c) Montrer que $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Interpréter f en coordonnées polaires.

Exercice 9 – Dérivées partielles sans approximation affine

Soit $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) Si f admettait un développement d'ordre 1 en $(0,0)$, que serait-il ? Montrer que c'est impossible en regardant $f(t,t)$.

c) En déduire que f n'est pas de classe C^1 au voisinage de l'origine.

Exercice 10 – Ouverts du plan

a) Montrer que le demi-plan $P = \{(x,y) : x > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (exhiber un disque centré en chaque point).

b) Montrer que $F = \{(x,y) : x \geq 0\}$ n'est pas ouvert.

c) Montrer que $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert (utiliser l'inégalité triangulaire).

d) Pourquoi les dérivées partielles se définissent-elles naturellement sur un ouvert ?

Exercice 11 – Dérivée partielle nulle et domaine

a) Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$. Montrer qu'il existe g de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = g(y)$.

b) Sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \geq 0\}$ (plan privé d'une demi-droite), on pose $f(x,y) = y^2$ si $x > 0$ et $y > 0$, $f(x,y) = 0$ sinon. Montrer que f est C^1 sur U et que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

c) f s'écrit-elle $g(y)$? Expliquer.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Dérivées croisées différentes

Soit $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$.

b) En déduire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

c) Pourquoi le théorème de Schwarz ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 13 – Calcul de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes, sur leur domaine :

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)$;

b) $g(x,y) = x^y$ pour $x > 0$;

c) $h(x,y) = \displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Pour b), calculer aussi les dérivées en $(\mathrm{e}, 1)$.

Exercice 14 – Fonctions partielles continues, fonction discontinue

Soit $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que pour tout y_0, $x \mapsto f(x,y_0)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et de même pour $y \mapsto f(x_0,y)$.

b) Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ **selon tout vecteur** $u = (a,b)$, c'est-à-dire que $\dfrac{f(ta,tb)}{t}$ a une limite quand $t \to 0$.

c) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ (étudier $f(y^2,y)$).

Exercice 15 – Synthèse : une fonction continue mais pas C^1

Soit $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Pour $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, calculer la dérivée de f en $(0,0)$ selon u et la comparer à $\nabla f(0,0)\cdot u$.

d) En déduire que f n'admet pas de développement d'ordre 1 en $(0,0)$, donc n'est pas C^1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).