# Plaquette 3 – Règle de la chaîne, changements de variables et équations aux dérivées partielles

## Fonctions de deux variables — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

### Méthode

**Règle de la chaîne** : pour dériver $t \mapsto f(x(t), y(t))$, on somme les contributions des deux variables. Pour un **changement de variables** $(x, y) = \varphi(u, v)$, on pose $g(u, v) = f(\varphi(u, v))$ et on exprime $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ; on choisit $\varphi$ pour que l'**équation aux dérivées partielles** (EDP) devienne $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$ ou $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$, qui s'intègrent « à la main » (les constantes d'intégration deviennent des **fonctions arbitraires** de l'autre variable). On revient enfin aux variables $(x, y)$ et on vérifie.

### Exercice 1 – Dériver le long d'une courbe

Soit $f(x, y) = x^2 y$ et $g(t) = f(\cos t, \sin t)$.

a) Calculer $g'(t)$ par la règle de la chaîne.

b) Vérifier en calculant directement $g(t)$.

c) Déterminer les points du cercle unité où $f$ est maximale (étudier $g$).

### Exercice 2 – Fonctions radiales

Soit $\varphi$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.

a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) En déduire que $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

c) Montrer que le gradient de $f$ est colinéaire au vecteur position $(x, y)$. Interpréter à l'aide des lignes de niveau.

### Exercice 3 – Une EDP d'ordre 1 par changement linéaire

On cherche les $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

a) On pose $u = x + y$, $v = x - y$ et $g(u, v) = f(x, y)$, c'est-à-dire $f(x, y) = g(x + y, x - y)$. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$.

b) En déduire l'équation vérifiée par $g$, puis toutes les solutions $f$.

c) Vérifier le résultat, et interpréter : sur quelles droites $f$ est-elle constante ?

### Exercice 4 – EDP avec second membre

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ : $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = x + y$.

a) Avec $u = x + y$, $v = x - y$, $f(x, y) = g(u, v)$, montrer que l'équation devient $2\frac{\partial g}{\partial u} = u$.

b) Intégrer et conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Déterminer la solution telle que $f(x,0) = 0$ pour tout $x$.

## Exercice 5 – Équation de transport

Une concentration $c(x,t)$ transportée par un courant de vitesse constante $v > 0$ vérifie $\frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{\partial x} = 0$.

a) Avec $\xi = x - vt$, $\tau = t$ et $c(x,t) = g(\xi,\tau)$, montrer que $\frac{\partial g}{\partial \tau} = 0$.

b) En déduire $c(x,t) = c_0(x - vt)$, où $c_0$ est le profil initial.

c) Application : $c_0(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $v = 2$ m/s. Où se trouve le maximum de concentration à $t = 5$ s ?

## Exercice 6 – Équation des ondes

On cherche les $f$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

a) Avec $u = x + y$, $v = x - y$, $f(x,y) = g(u,v)$, montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$.

b) En déduire les solutions (formule de d'Alembert).

c) Déterminer la solution telle que $f(x,0) = \sin x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$.

## Exercice 7 – EDP en coordonnées polaires

On se place sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et l'on note $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Rappeler que $r\frac{\partial g}{\partial r} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) Résoudre $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ (sur $U$ privé de la demi-droite $\{y = 0, x \le 0\}$, pour que $\theta$ soit défini continûment).

c) Donner la solution telle que $f(1,0) = 0$ et $f$ constante sur le cercle unité.

## Exercice 8 – Identité d'Euler

Une fonction $f$ de classe $C^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est dite homogène de degré $\alpha$ si $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ pour tout $t > 0$.

a) En dérivant par rapport à $t$ puis en prenant $t = 1$, montrer que $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.

b) Vérifier sur $f(x,y) = x^3 + xy^2$ et sur $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$.

c) En économie, la fonction de production de Cobb-Douglas est $P(K,L) = AK^aL^b$. Pour quelle condition sur $a, b$ les rendements sont-ils constants (doubler les facteurs double la production) ? Interpréter l'identité d'Euler.

## Exercice 9 – Laplacien d'une fonction radiale

Soit $g$ de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[$ et $f(x,y) = g(r)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

a) Montrer que $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g''(r) + \frac{g'(r)}{r}$.

c) Déterminer les fonctions radiales harmoniques ($\Delta f = 0$) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

## Exercice 10 – Dériver t puissance t

Soit $F(x,y) = x^y$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

a) Calculer les dérivées partielles de $F$.

b) Par la règle de la chaîne, dériver $t \mapsto t^t = F(t,t)$ sur $]0,+\infty[$ et retrouver le résultat directement.

c) Dériver de même $t \mapsto t^{\sin t}$ et $t \mapsto (\ln t)^t$ (pour $t > 1$).

## Exercice 11 – Changement de variables multiplicatif

On cherche les $f$ de classe $C^1$ sur $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ telles que $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

a) On pose $u = xy$, $v = y$ (bijection de $U$ sur lui-même, d'inverse $x = \frac{u}{v}$, $y = v$) et $f(x,y) = g(xy, y)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) En déduire l'équation vérifiée par $g$ et résoudre.

c) Interpréter : sur quelles courbes $f$ est-elle constante ?

## Exercice 12 – Conservation de l'énergie

Un oscillateur a une position $x(t)$ et une vitesse $v(t) = x'(t)$ vérifiant $x'' = -\omega^2 x$. On définit l'énergie $E(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$.

a) Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(x(t),v(t))$ par la règle de la chaîne et montrer qu'elle est nulle.

b) Même question pour un pendule : $\theta'' = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$ et $E(\theta,\omega) = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{g}{\ell}\cos\theta$.

c) En déduire la vitesse angulaire maximale d'un pendule lâché sans vitesse depuis $\theta_0 = 60°$ ($\ell = 1$ m, $g = 9{,}81$ m/s²).

## Exercice 13 – Relations entre dérivées partielles d'un gaz

Pour une mole de gaz parfait, $PV = RT$. On peut voir chacune des trois grandeurs comme fonction des deux autres.

a) Calculer $\frac{\partial P}{\partial V}$ (à $T$ fixé), $\frac{\partial V}{\partial T}$ (à $P$ fixé), $\frac{\partial T}{\partial P}$ (à $V$ fixé).

b) Montrer que $\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P} = -1$. Pourquoi le résultat n'est-il pas $+1$ ?

c) Le coefficient de compressibilité isotherme est $\chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}$. Le calculer.

## Exercice 14 – Dérivée seconde le long d'une droite

Soit $f$ de classe $C^2$ et $\varphi(t) = f(a+th, b+tk)$.

a) Montrer que $\varphi''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, les dérivées étant prises en $(a+th, b+tk)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Vérifier sur $f(x,y) = x^2 y$ avec $(a,b) = (0,0)$, $(h,k) = (1,1)$.

c) En déduire que si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0$ et $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \leq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ partout, alors $f$ est convexe le long de toute droite.

## Exercice 15 – Synthèse : une solution de l'équation de la chaleur

Soit $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-x^2/(4t)}$ pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

a) Calculer $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

b) Montrer que $u$ vérifie l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

c) Pour $t$ fixé, étudier $x \mapsto u(x,t)$ : maximum, largeur (abscisses où $u$ vaut la moitié du maximum). Comment évoluent-ils avec $t$ ?

d) On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de $t$. Interpréter physiquement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).