# Plaquette 1 – Exponentielle, logarithme, puissances et réciproques

## Fonctions usuelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

### Boîte à outils

**Formules du cours.**

— **Exponentielle** : exp est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0\,;+\infty[$, strictement croissante, avec $\exp' = \exp$.

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a} \qquad (\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$$

— **Logarithme népérien** : réciproque de exp sur $]0\,;+\infty[$, avec $\ln' x = \frac{1}{x}$ et

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \qquad \ln(a^\alpha) = \alpha \ln a$$

— **Puissances réelles** : pour $x > 0$, $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$, de dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$.

— **Croissances comparées** : pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

— **Limites de référence** : $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

— **Arc tangente** : arctan est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, impaire, croissante, de dérivée $\frac{1}{1+x^2}$.

— **Fonctions hyperboliques** : $\mathrm{ch}x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, avec $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

## Correction de l'exercice 1 – Domaines de définition

— a) Il faut $x^2 - 4 > 0$, soit $x^2 > 4$, donc $x \in ]-\infty\,;-2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

— b) Il faut $\mathrm{e}^x \neq 1$, c'est-à-dire $x \neq 0$ : le domaine est $\mathbb{R}^*$.

— c) Deux conditions : $x > 0$ (pour ln) et $\ln x \geq 0$ (pour la racine), soit $x \geq 1$.

— Le domaine est donc $[1\,;+\infty[$ ; la seconde condition est la plus contraignante, elle **absorbe** la première.

**Réponse.** a) $]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$ · b) $\mathbb{R}^*$ · c) $[1\,;+\infty[$.

## Correction de l'exercice 2 – Équations exponentielles

a) On pose $X = \mathrm{e}^x$, avec la contrainte $X > 0$.

— L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$, dont les racines sont $X = 1$ et $X = 2$ (somme 3, produit 2).

— Les deux sont strictement positives, donc acceptables.

— $\mathrm{e}^x = 1$ donne $x = 0$ ; $\mathrm{e}^x = 2$ donne $x = \ln 2$.

— **Solutions** : $\{0\,;\ln 2\}$.

b) $x = \ln 5 \approx 1{,}609$.

— **Méthode à retenir** : tout polynôme en $\mathrm{e}^x$ se traite par le changement de variable $X = \mathrm{e}^x$, en n'oubliant **jamais** la contrainte $X > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** a) $\{0\,;\ln 2\}$ · b) $x = \ln 5$.

## Correction de l'exercice 3 – Équations logarithmiques

**Conditions d'existence** : $x > 0$ **et** $x - 3 > 0$, donc $x > 3$.

— Sur ce domaine, $\ln x + \ln(x-3) = \ln(x(x-3))$.
— L'équation devient $\ln(x(x-3)) = \ln 4$, et ln étant **injective** : $x(x-3) = 4$.
— Soit $x^2 - 3x - 4 = 0$, de discriminant $9 + 16 = 25$ : $x = 4$ ou $x = -1$.
— **Filtrage par le domaine** : $-1$ est à rejeter (il ne vérifie pas $x > 3$) ; seule $x = 4$ convient.
— Vérification : $\ln 4 + \ln 1 = \ln 4$ ✓.

**Réponse.** $x = 4$ (la racine $-1$ est hors du domaine).

## Correction de l'exercice 4 – Inéquation

**Condition d'existence** : $2x - 1 > 0$, soit $x > \dfrac{1}{2}$.

— ln étant **strictement croissante**, l'inégalité équivaut à $2x - 1 \leq \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
— Donc $2x \leq \mathrm{e} + 1$ et $x \leq \dfrac{\mathrm{e}+1}{2} \approx 1{,}859$.
— En intersectant avec le domaine : $x \in \left]\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right]$.
— **Point de méthode** : la croissance de ln conserve le sens de l'inégalité ; on n'oublie pas d'intersecter avec le domaine.

**Réponse.** $x \in \left]\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right]$.

## Correction de l'exercice 5 – Dérivées

— a) Produit : $f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = x(x+2)\mathrm{e}^x$.
— b) Quotient : $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.
— c) Composée $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u = 1 + x^2$ : $h'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
— Lecture de b) : $g'$ s'annule pour $\ln x = 1$, soit $x = \mathrm{e}$ : la fonction $\dfrac{\ln x}{x}$ atteint son maximum en e, où elle vaut $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

**Réponse.** a) $x(x+2)\mathrm{e}^x$ · b) $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ · c) $\dfrac{2x}{1+x^2}$.

## Correction de l'exercice 6 – Croissances comparées

— a) Croissance comparée : l'exponentielle l'emporte sur toute puissance, donc la limite est $+\infty$.
— b) On factorise par $x$ : $x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.
— Or $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$, donc la parenthèse tend vers 1 et le produit vers $+\infty$.
— c) Croissance comparée en $0^+$ : $x\ln x \to 0$.
— **Justification de c)** : en posant $x = \dfrac{1}{t}$ avec $t \to +\infty$, on obtient $-\dfrac{\ln t}{t} \to 0$.

**Réponse.** a) $+\infty$ · b) $+\infty$ · c) $0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 7 – Limites de référence

On se ramène aux limites de référence par un facteur.

— a) $\dfrac{e^{3x}-1}{x} = 3 \times \dfrac{e^{3x}-1}{3x}$. En posant $u = 3x \to 0$, le quotient tend vers 1, donc la limite vaut 3.

— b) $\dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 2 \times \dfrac{\ln(1+2x)}{2x} \to 2 \times 1 = 2$.

— **Interprétation** : ces limites sont les **nombres dérivés** en 0 des fonctions $x \mapsto e^{3x}$ et $x \mapsto \ln(1+2x)$, qui valent respectivement 3 et 2.

**Réponse.** a) 3 · b) 2.

## Correction de l'exercice 8 – Puissances réelles

a) Par définition, $x^x = e^{x\ln x}$ (licite car $x > 0$).

b) On dérive la composée $e^u$ avec $u = x\ln x$ et $u' = \ln x + 1$ :

$$f'(x) = (\ln x + 1)\, e^{x\ln x} = (\ln x + 1)\, x^x$$

c) $x^x > 0$, donc $f'$ a le signe de $\ln x + 1$ : négatif pour $x < e^{-1}$, positif au-delà.

— Le minimum est atteint en $x = e^{-1}$, et vaut $f\left(e^{-1}\right) = e^{-1/e} \approx 0{,}692$.

— Contrôle numérique : $f(0{,}3) \approx 0{,}697$ et $f(0{,}4) \approx 0{,}693$ : cohérent avec un minimum vers 0,368.

**Réponse.** a) $e^{x\ln x}$ · b) $(\ln x + 1)x^x$ · c) minimum $e^{-1/e} \approx 0{,}692$ en $x = e^{-1}$.

## Correction de l'exercice 9 – Arc tangente

a) $\arctan 0 = 0$ ; $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ (car $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ et $\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$) ; la limite en $+\infty$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$ (asymptote horizontale).

b) Composée : $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ avec $u = 2x$.

$$(\arctan(2x))' = \frac{2}{1+4x^2}$$

— Cette dérivée est strictement positive : $x \mapsto \arctan(2x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Réponse.** a) 0 ; $\dfrac{\pi}{4}$ ; $\dfrac{\pi}{2}$ · b) $\dfrac{2}{1+4x^2}$.

## Correction de l'exercice 10 – Fonctions hyperboliques

a) On part des définitions et on développe.

— $\mathrm{ch}^2 x = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$ et $\mathrm{sh}^2 x = \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$.

— La différence vaut $\dfrac{4}{4} = 1$ : la relation est démontrée,

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

b) - $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}x$.

— $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}x$.

— **À noter** : contrairement au cas circulaire, il n'y a **pas de signe moins** dans ces dérivées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** a) différence $= \frac{4}{4} = 1$ · b) ch′ = sh et sh′ = ch.

## Correction de l'exercice 11 – Étude d'une fonction

a) $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ (calculée plus haut).

— Le dénominateur est positif, donc $f'$ a le signe de $1 - \ln x$ : positif pour $x < \mathrm{e}$, négatif au-delà.

| **Intervalle** | $]0\,;\mathrm{e}]$ | $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ |
|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | + | − |
| Variations de $f$ | croissante | décroissante |

— Maximum : $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368$.

b) - En $0^+$ : $\ln x \to -\infty$ et $\dfrac{1}{x} \to +\infty$, donc $f(x) \to -\infty$.

— En $+\infty$ : croissance comparée, $\dfrac{\ln x}{x} \to 0^+$.

— La courbe admet donc l'axe des abscisses pour **asymptote** en $+\infty$.

**Réponse.** a) croissante puis décroissante, maximum $\frac{1}{\mathrm{e}}$ en $x = \mathrm{e}$ · b) $-\infty$ et 0.

## Correction de l'exercice 12 – Comparer deux nombres

On utilise l'étude précédente de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

— $\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}$ équivaut, en passant au logarithme (croissant), à $\pi \ln \mathrm{e} > \mathrm{e} \ln \pi$, c'est-à-dire $\pi > \mathrm{e} \ln \pi$.

— En divisant par $\mathrm{e}\pi > 0$, cela équivaut à

$$\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Leftrightarrow f(\mathrm{e}) > f(\pi)$$

— Or $f$ atteint son **maximum strict** en e, et $\pi \neq \mathrm{e}$ : l'inégalité $f(\mathrm{e}) > f(\pi)$ est donc vraie.

— **Conclusion** : $\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}$.

— Contrôle numérique : $\mathrm{e}^{\pi} \approx 23{,}14$ et $\pi^{\mathrm{e}} \approx 22{,}46$. Cohérent.

**Réponse.** $\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}$ (grâce au maximum de $\frac{\ln x}{x}$ en e).

## Correction de l'exercice 13 – Arc sinus et arc cosinus

**a)** $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, et $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ donc $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$ (et non $\frac{5\pi}{6}$, hors de l'intervalle d'arrivée).

**b)** sin est dérivable de dérivée cos $> 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

— car $\cos(\arcsin x) \geq 0$ et $\cos^2 = 1 - \sin^2 = 1 - x^2$.

**c)** $\arccos' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ : la somme a une dérivée nulle sur $]-1,1[$, elle est constante, égale à sa valeur en 0 : $0 + \frac{\pi}{2}$ ; continuité aux bords.

**d)** $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $\arcsin' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; $\arcsin + \arccos = \dfrac{\pi}{2}$ ; $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

## Correction de l'exercice 14 – Tangente hyperbolique et sa réciproque

**a)** Quotient d'une fonction impaire par une fonction paire : impaire.
$\text{th}' = \dfrac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \dfrac{1}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2 > 0$.

**b)** $\text{th}\, x = \dfrac{1-\text{e}^{-2x}}{1+\text{e}^{-2x}} \to 1$ en $+\infty$, et $-1$ en $-\infty$ par imparité. Continue, strictement croissante : bijection sur $]-1, 1[$.

**c)** $\text{th}\, x = \dfrac{X-1}{X+1} = y \Leftrightarrow X = \dfrac{1+y}{1-y}$ :

$$\text{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$

**d)** $\text{th}(\ln 2) = \dfrac{4-1}{4+1} = \dfrac{3}{5}$ (avec $X = \text{e}^{2\ln 2} = 4$), et $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{8/5}{2/5} = \dfrac{1}{2}\ln 4 = \ln 2$ ✓

**Réponse.** $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$ ; bijection $\mathbb{R} \to ]-1, 1[$, réciproque $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$ ; $\text{th}(\ln 2) = \dfrac{3}{5}$.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : équation mixte

**Première équation.** On pose $X = \text{e}^x > 0$ : $X^2 - X - 6 = 0$.

— Discriminant $1 + 24 = 25$ : $X = 3$ ou $X = -2$.
— $X = -2$ est **impossible** ($\text{e}^x > 0$) ; reste $\text{e}^x = 3$, donc $x = \ln 3 \approx 1{,}099$.

**Seconde équation.** Domaine : $x > 0$. On pose $Y = \ln x$ (sans contrainte de signe cette fois).

— $Y^2 - Y - 6 = 0$ donne $Y = 3$ ou $Y = -2$.
— $\ln x = 3$ donne $x = \text{e}^3 \approx 20{,}09$ ; $\ln x = -2$ donne $x = \text{e}^{-2} \approx 0{,}135$.
— Les deux solutions sont strictement positives : elles conviennent toutes les deux.
— **Différence essentielle** : la contrainte $X > 0$ élimine une racine dans le premier cas, pas dans le second.

**Réponse.** $x = \ln 3$ ; puis $x = \text{e}^3$ ou $x = \text{e}^{-2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).