Plaquette 2 – Exponentielles, logarithmes et puissances

Fonctions usuelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Puissances : pour $a>0$, $a^b=\mathrm{e}^{b\ln a}$; $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ ($a>0$, $a\neq 1$).

— **Inégalités** : $\ln(1+x)\leq x$ ($x>-1$), $\mathrm{e}^x\geq 1+x$ ($x\in\mathbb{R}$), et $\dfrac{x}{1+x}\leq\ln(1+x)$.

— **Croissances comparées** ($\alpha,\beta>0$) : $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}\to 0$, $\dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\beta x}}\to 0$ en $+\infty$; $x^\alpha|\ln x|^\beta\to 0$ en 0^+.

— **Forme** 1^∞ :

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{x\ln(1+a/x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^a$$

— **Caractérisation** : les fonctions continues non nulles vérifiant $f(x+y)=f(x)f(y)$ sont les $x\mapsto a^x$ ($a>0$).

Correction de l'exercice 1 – L'équation x^y = y^x

a) $x^y=y^x\Leftrightarrow y\ln x=x\ln y\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln y}{y}$ (division par $xy>0$).

b) $f'=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$: f croît sur $]0,\mathrm{e}]$, décroît ensuite, $f\leq 0$ sur $]0,1]$ et $f>0$ au-delà. Une valeur prise deux fois l'est une fois de chaque côté de e, et doit être >0 (sur $]0,1]$, f est injective et négative, valeurs non reprises après 1) : $1<x<\mathrm{e}<y$.

c) x entier dans $]1,\mathrm{e}[$: $x=2$. Alors $f(y)=\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{\ln 4}{4}$, donc $y=4$:

$$2^4=4^2=16$$

d) $\dfrac{y}{x}=1+\dfrac{1}{t}$ et $y=x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$; $x^y=y^x\Leftrightarrow y\ln x=x\ln y\Leftrightarrow\dfrac{y}{x}\ln x=\ln x+\ln\dfrac{y}{x}$, soit $\dfrac{1}{t}\ln x=\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$, vrai car $\ln x=t\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$ ✓ ($t=1$ redonne $(2,4)$).

Réponse. $1<x<\mathrm{e}<y$; unique couple d'entiers $(2,4)$; paramétrage $x=(1+\frac{1}{t})^t$, $y=(1+\frac{1}{t})^{t+1}$.

Correction de l'exercice 2 – Logarithmes de base quelconque

a) $a^{\log_a b}=b$ donne $\log_a b\ln a=\ln b$. Produit : $\dfrac{\ln b}{\ln a}\cdot\dfrac{\ln a}{\ln b}=1$.

b) $\log_4 x=\dfrac{\log_2 x}{2}$, $\log_8 x=\dfrac{\log_2 x}{3}$:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\log_2 x=\frac{11}{6}\log_2 x=\frac{11}{2}\Leftrightarrow\log_2 x=3\Leftrightarrow x=8$$

c) $\log_{10}2^{2026}=2026\times 0{,}30103\approx 609{,}89$: 2^{2026} a $\lfloor 609{,}89\rfloor+1=610$ chiffres.

d) Domaine : $x>0$, $x\neq 1$. $\dfrac{\ln 4}{\ln x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\ln x=2\ln 4\Leftrightarrow x=16$ (contrôle : $16^{1/2}=4$ ✓).

Réponse. $x=8$; 2^{2026} a 610 chiffres ; $\log_x 4=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=16$.

Correction de l'exercice 3 – Formes indéterminées 1^∞

a) $x\ln(1+\frac{a}{x})=a\cdot\dfrac{\ln(1+a/x)}{a/x}\to a$ ($a\neq 0$; trivial si $a=0$), d'où e^a.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sim\frac{1}{x}\to 0$: limite 1. $x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim x\to+\infty$: limite $+\infty$. (Numériquement, $x=10^6$: 1,000001.)

c) $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$:

$$x\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\sim\frac{2x}{x-1}\to 2,\qquad\text{limite } \mathrm{e}^2$$

d) $\frac{\ln x}{x}\to 0$: $x^{1/x}\to 1$. $\frac{\ln\ln x}{x}\to 0$: $(\ln x)^{1/x}\to 1$.

Réponse. a) e^a ; b) 1 et $+\infty$; c) e^2 ; d) 1 et 1.

Correction de l’exercice 4 – Encadrement du logarithme

a) $\ln(1+x)\le x$ par concavité (tangente en 0). Pour la minoration, on applique la majoration à $\frac{-x}{1+x}>-1$: $\ln\frac{1}{1+x}\le\frac{-x}{1+x}$.

b) $x=\frac{1}{n}$: $\frac{1/n}{1+1/n}=\frac{1}{n+1}$.

c) On multiplie par n et on applique exp croissante :

$$\mathrm{e}^{\frac{n}{n+1}}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\mathrm{e}$$

d) $\mathrm{e}-\mathrm{e}^{n/(n+1)}=\mathrm{e}\left(1-\mathrm{e}^{-1/(n+1)}\right)\le\frac{\mathrm{e}}{n+1}$ (car $1-\mathrm{e}^{-u}\le u$) : $\frac{\mathrm{e}}{n+1}\le 10^{-2}$ pour $n\ge 271$.

Réponse. $\frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x$; $\mathrm{e}^{n/(n+1)}\le(1+\frac{1}{n})^n\le\mathrm{e}$; $n\ge 271$ suffit.

Correction de l’exercice 5 – L’équation fonctionnelle de l’exponentielle

a) $x=y=0$: $f(0)=f(0)^2$, donc $f(0)\in\{0,1\}$. Si $f(x_0)=0$, alors pour tout x, $f(x)=f(x_0)f(x-x_0)=0$: exclu. Donc f ne s’annule pas et $f(0)=1$.

b) $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)^2>0$.

c) $g(x+y)=\ln(f(x)f(y))=g(x)+g(y)$: g additive, donc $g(r)=rg(1)$ pour $r\in\mathbb{Q}$ (plaquette de raisonnement). Pour x réel, $x=\lim r_n$ avec $r_n\in\mathbb{Q}$; g continue :

$$g(x)=\lim g(r_n)=\lim r_n g(1)=xg(1)$$

d) $f(x)=\mathrm{e}^{xg(1)}=\mathrm{e}^{x\ln f(1)}=f(1)^x$. Réciproquement, $a^{x+y}=a^xa^y$ ✓

Réponse. $f(0)=1$, $f>0$, $\ln f$ additive continue donc linéaire : $f(x)=a^x$, $a=f(1)>0$.

Correction de l’exercice 6 – Étude de x^(1/x)

a) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}x^{1/x}$.

b) Signe de $1-\ln x$: croissante sur $]0,\mathrm{e}]$, décroissante ensuite ;

$$\max f=f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}\approx 1{,}4447$$

c) En 0^+ : $\frac{\ln x}{x}\to-\infty$, $f\to 0$. En $+\infty$: $\frac{\ln x}{x}\to 0$, $f\to 1$.

d) f décroît sur $[3,+\infty[$: $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}$; et $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}$ ($2^{1/2}=4^{1/4}$). Le plus grand est $\sqrt[3]{3}\approx 1{,}442$ (proche du maximum, car 3 est l’entier le plus proche de e).

Réponse. Maximum $\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ en e ; limites 0 et 1 ; le plus grand est $\sqrt[3]{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Comparer 2^100 et 100^15

a) $100\ln 2 \approx 69{,}315$ et $15\ln 100 = 30\ln 10 \approx 69{,}078$: $2^{100} > 100^{15}$ (de peu : $1{,}27\times 10^{30}$ contre 10^{30}).

b) $3^{200} = 9^{100}$ et $2^{300} = 8^{100}$:

$$3^{200} = 9^{100} > 8^{100} = 2^{300}$$

c) $2^n > n^{10} \Leftrightarrow \frac{\ln n}{n} < \frac{\ln 2}{10} \approx 0{,}0693$. $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ décroît après e : il existe un seuil. $n = 58$: $\frac{\ln 58}{58} \approx 0{,}0700$ (non) ; $n = 59$: $\approx 0{,}0691$ (oui). Pour les petits n : $n = 1$ ($2 > 1$) convient aussi. Donc $n = 1$ ou $n \geq 59$.

d) Toute exponentielle 2^n finit par dépasser toute puissance n^{10}, mais le seuil peut être grand.

Réponse. $2^{100} > 100^{15}$; $3^{200} > 2^{300}$; $2^n > n^{10}$ pour $n = 1$ et $n \geq 59$.

Correction de l'exercice 8 – Démontrer les croissances comparées

a) Concavité de ln (tangente en 1), ou étude de $x - 1 - \ln x$ (minimum 0 en 1).

b) $\ln\sqrt{x} \leq \sqrt{x} - 1 < \sqrt{x}$, donc $\ln x < 2\sqrt{x}$ et

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \to 0 \quad (x \geq 1)$$

c) $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\ln u}{u}\right)^\beta \to 0$.

d) $x = \ln X$: $\frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = \frac{(\ln X)^\alpha}{X} \to 0$. En 0^+, $x = \frac{1}{X}$: $x^\alpha \ln x = -\frac{\ln X}{X^\alpha} \to 0$.

Réponse. $\ln x \leq 2\sqrt{x}$ donne $\frac{\ln x}{x} \to 0$; toutes les croissances comparées s'en déduisent par changement de variable.

Correction de l'exercice 9 – Une équation avec l'exponentielle

a) $h(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$: $h'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x \geq 0$ (inégalité usuelle), donc h croissante, $h(0) = 0$: $h \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, $h \leq 0$ sur $\mathbb{R}_-$.

b) $h' > 0$ sauf en 0, donc h strictement croissante : son unique zéro est 0.

c) $k(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$: $k' = \mathrm{e}^x - 1$, minimum $k(0) = 0$ strict : seule solution $x = 0$.

d) Par récurrence (intégrer l'inégalité de rang $n-1$ sur $[0, x]$) :

$$\mathrm{e}^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad (x \geq 0)$$

Réponse. h strictement croissante, unique zéro 0 ; $\mathrm{e}^x \geq \sum_{k \leq n} \frac{x^k}{k!}$ pour $x \geq 0$.

Correction de l'exercice 10 – L'inéquation 2^x > x²

a) $2^2 = 4 = 2^2$ et $2^4 = 16 = 4^2$.

b) $\psi(x) = 2^x - x^2$: $\psi(-1) = \frac{1}{2} - 1 < 0$, $\psi(0) = 1 > 0$; sur $]-\infty, 0]$, $\psi' = 2^x\ln 2 - 2x > 0$: une unique racine $\alpha \in]-1, 0[$.

c) Pour $x > 0$, $2^x = x^2 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$; $\varphi'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x}$ s'annule une fois en $\frac{2}{\ln 2}$: φ décroît puis croît, donc a **au plus deux** zéros ; ce sont 2 et 4.

d) Signe de ψ en suivant les zéros α, 2, 4 :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$2^x > x^2 \Leftrightarrow x \in]\alpha, 2[\cup]4, +\infty[$$

— (contrôle : $x = 3$, $8 < 9$ ✓ exclu).

Réponse. Solutions $\alpha \approx -0{,}767$, 2, 4 ; $2^x > x^2$ sur $]\alpha, 2[\cup]4, +\infty[$.

Correction de l'exercice 11 – Les fonctions puissances

a) $p_\alpha' = \alpha x^{\alpha-1}$, $p_\alpha'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$: croissante si $\alpha > 0$, décroissante si $\alpha < 0$; convexe si $\alpha \notin [0,1]$, concave si $\alpha \in [0,1]$.

b) $\alpha > 0$: $x^\alpha \to 0$, prolongeable par 0 ; tangente horizontale si $\alpha > 1$ ($p' \to 0$), verticale si $0 < \alpha < 1$ ($p' \to +\infty$). $\alpha < 0$: $x^\alpha \to +\infty$.

c) $x^a \le x^b \Leftrightarrow (b-a)\ln x \ge 0$:

$$0 < x < 1 : x^2 < x < \sqrt{x}; \qquad x > 1 : \sqrt{x} < x < x^2$$

d) $(x^a)^b = \mathrm{e}^{b\ln(x^a)} = \mathrm{e}^{ab\ln x}$; $x^a x^b = \mathrm{e}^{(a+b)\ln x}$.

Réponse. Croissante ssi $\alpha > 0$, convexe ssi $\alpha \notin [0,1]$; sur $]0,1[$: $x^2 < x < \sqrt{x}$.

Correction de l'exercice 12 – Encadrer ln(n!)

a) ln croissante : sur $[k-1, k]$, $\ln t \le \ln k$; sur $[k, k+1]$, $\ln t \ge \ln k$.

b) On somme de $k = 2$ à n (et $\ln 1 = 0$) :

$$\int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t \le \ln(n!) \le \int_2^{n+1} \ln t\,\mathrm{d}t \le \int_1^{n+1} \ln t\,\mathrm{d}t$$

— soit $n\ln n - n + 1 \le \ln(n!) \le (n+1)\ln(n+1) - n$.

c) Les deux bornes sont équivalentes à $n\ln n$ (car $(n+1)\ln(n+1) \sim n\ln n$ et $n = o(n\ln n)$).

d) $14{,}026 \le 15{,}104 \le 16{,}377$ ✓

Réponse. $n\ln n - n + 1 \le \ln n! \le (n+1)\ln(n+1) - n$; $\ln n! \sim n\ln n$.

Correction de l'exercice 13 – Caractériser l'exponentielle par f' = f

a) $g' = (f' - f)\mathrm{e}^{-x} = 0$: g constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

b) $g(0) = 1$, donc $f(x) = \mathrm{e}^x$.

c) $(f\mathrm{e}^{-ax})' = (f' - af)\mathrm{e}^{-ax} = 0$:

$$f' = af \Leftrightarrow f(x) = f(0)\,\mathrm{e}^{ax}$$

d) $N(t) = N_0\mathrm{e}^{0{,}03t} = 2N_0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23{,}1$ ans (« règle de 70 » : $70/3 \approx 23$).

Réponse. $(f\mathrm{e}^{-x})' = 0$: $f = \exp$; $f' = af \Leftrightarrow f = C\mathrm{e}^{ax}$; doublement en $\dfrac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23$ ans.

Correction de l'exercice 14 – La moyenne logarithmique

a) $L(1,4) = \dfrac{3}{\ln 4} \approx 2{,}164$; $G = 2$, $A = 2{,}5$: $G < L < A$.

b) $G \le L \Leftrightarrow \ln\dfrac{b}{a} \le \dfrac{b-a}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow 2\ln t \le t - \dfrac{1}{t}$. $u(t) = t - \dfrac{1}{t} - 2\ln t$:

$u'(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{2}{t} = \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)^2 \ge 0$, $u(1) = 0$.

c) $v(t) = \ln t - \dfrac{2(t-1)}{t+1}$: $v'(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{4}{(t+1)^2} = \dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \ge 0$, $v(1) = 0$ (avec $t = \dfrac{b}{a}$ ici).

$$\sqrt{ab} \le \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \le \frac{a+b}{2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$ et $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\frac{b}{a}$ ✓ (la moyenne logarithmique apparaît en thermique pour les échanges de chaleur).

Réponse. $L(1,4) \approx 2{,}164$; $G \le L \le A$ par deux études de fonctions.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : la suite (1 + 1/n)^n est croissante

a) $g'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{-1/x^2}{1+1/x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

b) Avec $u = \frac{1}{x}$: $\ln(1+u) > \frac{u}{1+u} = \frac{1}{x+1}$ (inégalité stricte pour $u \neq 0$).

c) $u_n = \mathrm{e}^{g(n)}$ avec g strictement croissante ; $g(x) \to 1$ en $+\infty$ ($\frac{\ln(1+u)}{u} \to 1$), donc $u_n \uparrow \mathrm{e}$.

d) $h(x) = (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$: $h'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$. Donc $v_n \downarrow \mathrm{e}$ (et $v_n = u_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$). Pour $n = 10$:

$$u_{10} \approx 2{,}5937 < \mathrm{e} < v_{10} \approx 2{,}8531$$

Réponse. $g' = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1} > 0$: $(1+\frac{1}{n})^n \uparrow \mathrm{e}$, $(1+\frac{1}{n})^{n+1} \downarrow \mathrm{e}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).