Plaquette 3 – Fonctions circulaires réciproques

Fonctions usuelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées :

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1), \qquad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

— **Identités** : $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x>0$, $-\frac{\pi}{2}$ si $x<0$.

— **Composées** : $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

— **Addition** : si $\arctan a + \arctan b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (par exemple $ab<1$), alors $\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$.

— **Primitives** : $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$.

Correction de l'exercice 1 – arctan x + arctan(1/x)

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$.

b) f est constante sur **chaque** intervalle : $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x<0 \end{cases}$$

c) Dans un triangle rectangle de côtés 1 et x, les deux angles aigus ont pour tangentes x et $\frac{1}{x}$: ils sont complémentaires.

d) $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. (Une fonction de dérivée nulle n'est constante que sur un **intervalle** : f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.)

Réponse. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x>0$, $-\frac{\pi}{2}$ si $x<0$.

Correction de l'exercice 2 – La fonction arcsin(sin x)

a) $\sin x \in [-1,1]$; périodicité et imparité héritées de sin (et arcsin impaire).

b) Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $f(x) = x$. Sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$: $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin x = \sin(\pi - x)$:

$$f(x) = \pi - x$$

c) Une fonction « en dents de scie triangulaire », de pentes ± 1, oscillant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ ✓

d) $\frac{7\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$: $\pi - \frac{7\pi}{5} = -\frac{2\pi}{5}$. $10 - 2\pi \approx 3{,}717 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$:
$f(10) = \pi - (10 - 2\pi) = 3\pi - 10 \approx -0{,}575$.

Réponse. $f(x) = x$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\pi - x$ sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; $f(\frac{7\pi}{5}) = -\frac{2\pi}{5}$, $f(10) = 3\pi - 10$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – La fonction arccos(cos x)

a) 2π-périodique et paire.

b) Sur $[0,\pi]$: $g(x)=x$. Sur $[-\pi,0]$, $-x\in[0,\pi]$ et $\cos x=\cos(-x)$: $g(x)=-x$.

c)

$$\arccos(\cos x)=|x| \quad (x\in[-\pi,\pi])$$

— prolongée par 2π-périodicité : dents de scie entre 0 et π.

d) $-5+2\pi\approx 1{,}283\in[-\pi,\pi]$: $g(-5)=2\pi-5$. $g(x)=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x\equiv\pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Réponse. $g(x)=|x|$ sur $[-\pi,\pi]$, 2π-périodique ; $g(-5)=2\pi-5$; $g=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

Correction de l'exercice 4 – Une identité par dérivation

a) $1+x^2-2|x|=(1-|x|)^2\geq 0$, donc $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leq 1$.

b) $u=\frac{2x}{1+x^2}$, $u'=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ et $\sqrt{1-u^2}=\frac{|1-x^2|}{1+x^2}$:

$$h'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$$

c) Sur $]-1,1[$, $h-2\arctan$ est constante, nulle en 0 ; par continuité, $h=2\arctan$ sur $[-1,1]$. Sur $]1,+\infty[$, $h+2\arctan$ est constante, égale à sa limite en 1^+ : $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, donc $h(x)=\pi-2\arctan x$.

d) $x=\tan\theta$, $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $h=\arcsin(\sin 2\theta)$, égal à 2θ si $|2\theta|\leq\frac{\pi}{2}$, soit $|x|\leq 1$ ✓

Réponse. $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=2\arctan x$ sur $[-1,1]$, $\pi-2\arctan x$ sur $]1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 5 – Résoudre une équation en arctan

a) $\varphi(x)=\arctan x+\arctan 2x$ est strictement croissante, $\varphi(0)=0<\frac{\pi}{4}$: une solution est >0, et il y en a au plus une.

b) $\tan\varphi(x)=\frac{x+2x}{1-2x^2}=1$:

$$3x=1-2x^2\Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

c) Seule $x=\frac{\sqrt{17}-3}{4}\approx 0{,}281$ est positive. Pour elle, $2x^2<1$ donc $\varphi(x)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ où tan est injective : $\varphi(x)=\frac{\pi}{4}$ ✓ (l'autre racine, négative, donne $\varphi<0$).

d) $\arctan 0{,}2808+\arctan 0{,}5616\approx 0{,}2737+0{,}5117=0{,}7854=\frac{\pi}{4}$ ✓

Réponse. Unique solution $x=\frac{\sqrt{17}-3}{4}\approx 0{,}281$.

Correction de l'exercice 6 – Une équation mêlant arccos et arcsin

a) Il faut $|x|\leq 1$ et $|2x|\leq 1$: $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. $\arccos x\geq 0$ impose $\arcsin(2x)\geq 0$, donc $x\geq 0$.

b) Les deux angles sont dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, où sin est injective : l'équation équivaut à $\sin(\arccos x)=2x$, soit

$$\sqrt{1-x^2}=2x\Leftrightarrow 1-x^2=4x^2\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0{,}447 \le \frac{1}{2}$ ✓ ; $\arccos 0{,}447 \approx 1{,}1071$ et $\arcsin 0{,}894 \approx 1{,}1071$ ✓

d) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \Leftrightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Réponse. $\arccos x = \arcsin 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\arcsin x = \arccos x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Encadrer arctan

a) $u(x) = x - \arctan x$: $u'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \ge 0$, $u(0) = 0$.

b) $v(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$: $v'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} \ge 0$, $v(0) = 0$.

c) De même $w(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \arctan x$ a pour dérivée $\frac{x^6}{1+x^2} \ge 0$: $\arctan x \le x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$. D'où

$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} \le \frac{x - \arctan x}{x^3} \le \frac{1}{3} \quad (x > 0)$$

— et la limite $\frac{1}{3}$ par encadrement (parité pour $x < 0$).

d) $0{,}1 - \frac{0{,}001}{3} \le \arctan 0{,}1 \le 0{,}1 - \frac{0{,}001}{3} + \frac{10^{-5}}{5}$: $\arctan 0{,}1 \approx 0{,}09967$ (à 2×10^{-6} près).

Réponse. $x - \frac{x^3}{3} \le \arctan x \le x$; $\frac{x - \arctan x}{x^3} \to \frac{1}{3}$; $\arctan 0{,}1 \approx 0{,}09967$.

Correction de l'exercice 8 – Une somme télescopique d'arctangentes

a) tan de la différence : $\frac{(2k+1) - (2k-1)}{1 + (4k^2 - 1)} = \frac{2}{4k^2} = \frac{1}{2k^2}$. La différence de deux angles de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, positive (arctan croissante), est dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Télescopage : $\arctan(2n+1) - \arctan 1$.

c) $\tan S_n = \frac{2n+1-1}{1+2n+1} = \frac{n}{n+1}$, avec $S_n \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$:

$$S_n = \arctan \frac{n}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

d) $n = 7$: somme directe $\approx 0{,}718830$ et $\arctan \frac{7}{8} \approx 0{,}718830$ ✓

Réponse. $S_n = \arctan(2n+1) - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{n}{n+1} \to \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 9 – Une fonction constante par morceaux

a) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$ et $1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = \frac{2(1+x^2)}{(1-x)^2}$: la dérivée du premier terme est $\frac{1}{1+x^2}$, donc $f' = 0$.

b) Sur $]-\infty, 1[$: $f(0) = \frac{\pi}{4}$. Sur $]1, +\infty[$: $\frac{1+x}{1-x} \to -1$ et $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, donc $f \to -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$:

$$f = \frac{\pi}{4} \text{ sur }]-\infty, 1[, \qquad f = -\frac{3\pi}{4} \text{ sur }]1, +\infty[$$

c) $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$; si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'arctan le rend ; sinon il faut retrancher π.

d) $f(-3) \approx f(0{,}3) \approx 0{,}7854$ et $f(2) \approx -2{,}3562$ ✓

Réponse. $f' = 0$; $f = \frac{\pi}{4}$ sur $]-\infty, 1[$ et $-\frac{3\pi}{4}$ sur $]1, +\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Arcsin et arccos de racines

a) $\theta = \arcsin\sqrt{x} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos\theta = \sqrt{1-x} \geq 0$ et $\theta \in [0,\pi]$, donc $\theta = \arccos\sqrt{1-x}$.

b) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

c)

$$(\arcsin\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

d) $2\arcsin\sqrt{x}$ (contrôle numérique de a) en $x = 0{,}37$: 0,65389 des deux côtés ✓).

Réponse. $\arcsin\sqrt{x} = \arccos\sqrt{1-x} = \arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$; primitive de $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$: $2\arcsin\sqrt{x}$.

Correction de l'exercice 11 – Intégrales qui donnent π

a) $[\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$; $[\arcsin x]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$.

b) $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} = \arctan 2 - \arctan 1 = \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}3218$$

c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}u}{3(1+u^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$.

d) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}$, primitive $\arcsin\frac{x}{2}$: $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Réponse. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$; $\arctan 2 - \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$; $\frac{\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 12 – Argument d'un nombre complexe par arctan

a) $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ quand $x > 0$; alors $\tan\theta = \frac{y}{x}$ et $\theta = \arctan\frac{y}{x}$.

b) Avec $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{y/r}{1+x/r}$ (angle moitié), et $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ pour $\theta \in \,]-\pi, \pi[$:

$$\theta = 2\arctan\frac{y}{x+r}$$

c) $r = \sqrt{2}$: $2\arctan\frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2\arctan(\sqrt{2}+1) = 2 \times \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$ ✓ (car $\tan\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2}+1$).

d) arctan est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: pour $x < 0$, l'argument est hors de cet intervalle ($\arctan\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4}$ au lieu de $\frac{3\pi}{4}$, erreur de π).

Réponse. $\arg z = 2\arctan\frac{y}{x+|z|}$; pour $-1+i$: $\frac{3\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 13 – Réciproque de sin sur un autre intervalle

a) $\sin' = \cos < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$: strictement décroissante, de 1 à -1, continue.

b) Pour $y \in [-1,1]$, on cherche $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ avec $\sin x = y$; $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(\pi - x) = y$:

$$g(y) = \pi - \arcsin y$$

c) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, et $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ✓

d) tan est π-périodique : la réciproque est $y \mapsto \pi + \arctan y$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $g(y) = \pi - \arcsin y$; $g(\frac{1}{2}) = \frac{5\pi}{6}$; pour tan : $\pi + \arctan y$.

Correction de l'exercice 14 – Arcsin : encadrement et limite

a) $\theta = \arcsin x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\theta \le \theta$: $x \le \arcsin x$.

b) $\theta \le \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

c) $1 \le \frac{\arcsin x}{x} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to 1$ pour $x > 0$; imparité.

d) $x = \cos t$, $t = \arccos x \to 0^+$: $1 - x = 1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$, donc

$$\arccos x \sim \sqrt{2(1-x)} \quad (x \to 1^-)$$

— ce qui explique la tangente verticale de arccos (et arcsin) en 1.

Réponse. $x \le \arcsin x \le \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{\arcsin x}{x} \to 1$; $\arccos x \sim \sqrt{2(1-x)}$ en 1.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude de x arctan x

a) Produit de deux fonctions impaires : paire ; x et $\arctan x$ de même signe : $f \ge 0$.
$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$.

b) $f'' > 0$: convexe. f' croissante, $f'(0) = 0$: f décroît sur $\mathbb{R}_-$, croît sur $\mathbb{R}_+$, minimum $f(0) = 0$.

c) $f(x) = \frac{\pi}{2}x - x\arctan\frac{1}{x}$ et $x\arctan\frac{1}{x} \to 1$ ($\frac{\arctan u}{u} \to 1$) :

$$f(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - 1\right) = 1 - x\arctan\frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

d) Avec $u = \frac{1}{x}$: $1 - \frac{\arctan u}{u} \ge 0$ (car $\arctan u \le u$) : la courbe est **au-dessus** de l'asymptote (cohérent avec la convexité). Numériquement, $x = 1000$: écart $\approx 3 \times 10^{-7}$.

Réponse. f paire, convexe ($f'' = \frac{2}{(1+x^2)^2}$), minimum 0 ; asymptote $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ en $+\infty$, courbe au-dessus.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).