Plaquette 4 – Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

Fonctions usuelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Relations : $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$, $\mathrm{ch} + \mathrm{sh} = \exp$, $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$.

— **Addition** : $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\mathrm{sh}\,b$, $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\,a\mathrm{ch}\,b + \mathrm{ch}\,a\mathrm{sh}\,b$.

— **Réciproques** :

$$\mathrm{argsh}\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad \mathrm{argch}\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\ (x \geq 1), \qquad \mathrm{argth}\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

— **Dérivées** : $\mathrm{argsh}' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\mathrm{argch}' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\mathrm{argth}' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Correction de l’exercice 1 – Formules d’addition hyperboliques

a) $\mathrm{ch}\,a\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\mathrm{sh}\,b = \dfrac{(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b+\mathrm{e}^{-b}) + (\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^{-b})}{4} = \dfrac{2\mathrm{e}^{a+b}+2\mathrm{e}^{-a-b}}{4}$ ✓

b) $a = b = x$ puis $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$; de même $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,x$.

c) $\mathrm{sh}^3 x = \dfrac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^3}{8} = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-3x}}{8}$:

$$\mathrm{sh}^3 x = \frac{\mathrm{sh}\,3x - 3\mathrm{sh}\,x}{4}$$

— (contrôle en $x = 0{,}7$: 0,43653 des deux côtés).

d) $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$: le produit de deux sinus change de signe. De même $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ contre $\mathrm{sh}^3 x = \dfrac{\mathrm{sh}\,3x - 3\mathrm{sh}\,x}{4}$ (le cube de sh contient $\mathrm{sh}^2 \times \mathrm{sh}$).

Réponse. $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\mathrm{sh}\,b$; $\mathrm{sh}^3 x = \dfrac{\mathrm{sh}\,3x - 3\mathrm{sh}\,x}{4}$.

Correction de l’exercice 2 – Argument sinus hyperbolique

a) $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} > 0$; limites $\pm\infty$ en $\pm\infty$; continue.

b) $X - \dfrac{1}{X} = 2y \Leftrightarrow X^2 - 2yX - 1 = 0$, de racines $y \pm \sqrt{y^2+1}$; seule $y + \sqrt{y^2+1} > 0$ convient :

$$\mathrm{argsh}\,y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

c) Dérivée d’une réciproque : $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\,y)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ (car $\mathrm{ch} = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2}$). Directement :

$$\frac{1 + \dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}}{y + \sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$ ✓

d) $\mathrm{argsh}\,1 = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}8814$; $\mathrm{argsh}\,\dfrac{3}{4} = \ln\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{4}\right) = \ln 2$.

Réponse. $\mathrm{argsh}\,y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$, dérivée $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$; $\mathrm{argsh}\,\dfrac{3}{4} = \ln 2$.

Correction de l’exercice 3 – Argument cosinus hyperbolique

a) $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh} > 0$ sur $]0, +\infty[$; $\mathrm{ch}\,0 = 1$, limite $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $X+\frac{1}{X}=2y \Leftrightarrow X=y\pm\sqrt{y^2-1}$; pour $x\geq 0$, $X\geq 1$ impose le signe + (le produit des racines vaut 1).

c) ch est paire : $x=\pm\operatorname{argch}2$:

$$x=\pm\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\approx\pm 1{,}317$$

d) $[\operatorname{argch}x]_1^2=\ln(2+\sqrt{3})$.

Réponse. $\operatorname{argch}y=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$; $\operatorname{ch}x=2\Leftrightarrow x=\pm\ln(2+\sqrt{3})$; intégrale $\ln(2+\sqrt{3})$.

Correction de l’exercice 4 – Équations hyperboliques

a) $x=\operatorname{argsh}\frac{3}{4}=\ln 2$ (exercice 2).

b) $X=\mathrm{e}^x$: $X+\frac{1}{X}+\frac{X-1/X}{2}=2$, soit $\frac{3}{2}X+\frac{1}{2X}=2$, $3X^2-4X+1=0$:

$$X=1 \text{ ou } X=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-\ln 3$$

— Contrôle $x=-\ln 3$: ch $=\frac{5}{3}$, sh $=-\frac{4}{3}$, $\frac{10}{3}-\frac{4}{3}=2$ ✓

c) ch + sh $=\mathrm{e}^x=3$: $x=\ln 3$. Seconde : $\frac{X+1/X}{2}-\frac{3(X-1/X)}{2}=1\Leftrightarrow -2X+\frac{4}{X}=2\Leftrightarrow X^2+X-2=0$, $X=1$: $x=0$.

d) $x=\operatorname{argth}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 3$.

Réponse. a) $\ln 2$; b) 0 et $-\ln 3$; c) $\ln 3$ et 0 ; d) $\frac{1}{2}\ln 3$.

Correction de l’exercice 5 – Somme de cosinus hyperboliques

a) $\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^x-1}$ et $\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{-x}-1}$.

b) $\mathrm{e}^a-1=2\mathrm{e}^{a/2}\operatorname{sh}\frac{a}{2}$: $\sum\mathrm{e}^{kx}=\mathrm{e}^{nx/2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$, de même avec $-x$. La demi-somme :

$$C_n=\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{nx/2}+\mathrm{e}^{-nx/2}}{2}=\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{ch}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$

c) Les deux membres valent $\approx 11{,}5688$ ✓

d) Même structure que $\sum\cos(kx)=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$: on remplace sin, cos par sh, ch (pas de produit de deux sinus ici, donc pas de changement de signe).

Réponse. $\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(kx)=\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{ch}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$.

Correction de l’exercice 6 – Inégalités hyperboliques

a) $u(x)=\operatorname{ch}x-1-\frac{x^2}{2}$: $u'=\operatorname{sh}x-x$, $u''=\operatorname{ch}x-1\geq 0$, $u'(0)=0$ donc u' a le signe de x, et u a un minimum $u(0)=0$.

b) $(\operatorname{sh}x-x)'=\operatorname{ch}x-1\geq 0$ et la valeur en 0 est nulle. th est impaire et $(x-\operatorname{th}x)'=\operatorname{th}^2x\geq 0$.

c) $(2k)!=2^k k!\times(1\cdot 3\cdots(2k-1))\geq 2^k k!$, donc terme à terme

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k} \frac{(x^2/2)^k}{k!} = \mathrm{e}^{x^2/2}$$

d) $x = 1$: $1{,}5 \leq \operatorname{ch} 1 \approx 1{,}543 \leq \mathrm{e}^{0{,}5} \approx 1{,}649$ ✓

Réponse. $1 + \frac{x^2}{2} \leq \operatorname{ch} x \leq \mathrm{e}^{x^2/2}$; $\operatorname{sh} x \geq x$ ($x \geq 0$) ; $|\operatorname{th} x| \leq |x|$.

Correction de l’exercice 7 – La chaînette

a) $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ et $1 + y'^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$.

b) $\sqrt{1 + y'^2} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (positif), donc

$$L = \int_{-b}^{b} \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, \mathrm{d}x = \left[a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \right]_{-b}^{b} = 2a \operatorname{sh} \frac{b}{a}$$

c) $f = a\left(\operatorname{ch} \frac{b}{a} - 1\right)$.

d) $L = 2\operatorname{sh} 1 \approx 2{,}350$ pour une portée de 2 : le câble est 17,5 % plus long ; flèche $\operatorname{ch} 1 - 1 \approx 0{,}543$.

Réponse. $L = 2a \operatorname{sh} \frac{b}{a}$, flèche $a(\operatorname{ch} \frac{b}{a} - 1)$; $a = b = 1$: $L \approx 2{,}350$.

Correction de l’exercice 8 – La fonction de Gudermann

a) Composée de fonctions impaires strictement croissantes ; arctan est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) $\operatorname{gd}'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.

c) $\tan(\arctan u) = u$. Puis $\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ et $\cos\theta > 0$:

$$\cos(\operatorname{gd} x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

— (numériquement en $x = 1{,}3$: 0,50738 des deux côtés ✓).

d) Primitive $\arctan(\operatorname{sh} x)$; $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} = \lim \arctan(\operatorname{sh} x) - 0 = \frac{\pi}{2}$.

Réponse. $\operatorname{gd}' = \frac{1}{\operatorname{ch}}$; $\cos(\operatorname{gd} x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$; $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l’exercice 9 – Tangente hyperbolique et addition des vitesses

a) $\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}$, puis division par $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$.

b) $\frac{w}{c} = \operatorname{th}(\varphi_u + \varphi_v)$ et a) :

$$\frac{w}{c} = \frac{\frac{u}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

c) $\frac{w}{c} = \frac{1{,}6}{1{,}64} \approx 0{,}9756$: $w \approx 0{,}976c$ (et non $1{,}6c$).

d) $\frac{w}{c} = \operatorname{th}(\varphi_u + \varphi_v) \in]-1, 1[$: la vitesse de la lumière n’est jamais dépassée.

Réponse. $\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$; $0{,}8c \oplus 0{,}8c \approx 0{,}976c$.

Correction de l’exercice 10 – Hyperbole et paramétrage

a) $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ et $\operatorname{ch} t \geq 1 > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Si (x, y) est sur la branche, $t = \operatorname{argsh} y$ convient ($x = \sqrt{1+y^2} = \operatorname{ch} t$) et est unique (sh injective).

c) Vecteur tangent $(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$; tangente : $\operatorname{ch} t\, x - \operatorname{sh} t\, y = 1$. Quand $t \to +\infty$, $\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t = \mathrm{e}^{-t} \to 0$:

$$y - x \to 0 \quad : \text{asymptote } y = x$$

d) Pour le cercle, t est l'angle (et le double de l'aire du secteur) ; pour l'hyperbole, t est aussi le double de l'aire du « secteur hyperbolique » entre O, $(1,0)$ et $M(t)$: c'est l'« angle hyperbolique ».

Réponse. $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ paramètre la branche $x > 0$ de $x^2 - y^2 = 1$, asymptotes $y = \pm x$.

Correction de l'exercice 11 – Dérivées de argth et intégrales

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$.

b) Primitive $\frac{1}{2}(-\ln(1-x) + \ln(1+x))$ ✓

c)

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{argth}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3 \approx 0{,}549$$

d) $\operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}881$ et $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$; sur $[0,1]$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{1+x^2}$, cohérent.

Réponse. $\operatorname{argth}' = \frac{1}{1-x^2}$; $\int_0^{1/2} = \frac{1}{2}\ln 3$; $\operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2}) > \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 12 – Dérivées successives et parité

a) $\operatorname{ch}^{(n)} = \operatorname{ch}$ si n pair, sh si n impair ; l'inverse pour sh.

b) $\exp = \frac{\exp + \exp(-\cdot)}{2} + \frac{\exp - \exp(-\cdot)}{2} = \operatorname{ch} + \operatorname{sh}$ (décomposition unique en paire + impaire).

c) $u = y' + y$ vérifie $u' = y'' + y' = u$, donc $u = 2A\mathrm{e}^{x}$; $v = y' - y$ vérifie $v' = -v$, $v = -2B\mathrm{e}^{-x}$; d'où $y = \frac{u-v}{2} = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x}$, soit

$$y = \alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x$$

d) $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$: $y = 2\operatorname{ch} x$, puis $y = 3\operatorname{sh} x$.

Réponse. $y'' = y \Leftrightarrow y = \alpha\operatorname{ch} + \beta\operatorname{sh}$; solutions $2\operatorname{ch} x$ et $3\operatorname{sh} x$.

Correction de l'exercice 13 – Étude de la tangente hyperbolique

a) On multiplie numérateur et dénominateur de $\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$ par e^{x}.

b) Limites ± 1 en $\pm\infty$; et

$$1 - \operatorname{th} x = \frac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1} \sim 2\mathrm{e}^{-2x}$$

— ($\operatorname{th} 5 \approx 0{,}99991$: convergence très rapide vers 1).

c) $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$, donc $\operatorname{th}'' = -2\operatorname{th}\operatorname{th}' = -2\operatorname{th}(1-\operatorname{th}^2) \leq 0$ pour $x \geq 0$.

d) Courbe en « S » de -1 à 1, tangente $y = x$ en 0 (point d'inflexion), sous la tangente sur $\mathbb{R}_+$.

Réponse. $\operatorname{th} x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1}$; $1 - \operatorname{th} x \sim 2\mathrm{e}^{-2x}$; concave sur $\mathbb{R}_+$, inflexion en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Hyperboliques et complexes

a) $\cos(ix) = \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \operatorname{ch} x$; $\sin(ix) = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2i} = i\operatorname{sh} x$.

b) $\cos^2(ix) + \sin^2(ix) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

c) $\cos(a+ib) = \cos a \operatorname{ch} b - i \sin a \operatorname{sh} b$:

$$|\cos(a+ib)|^2 = \cos^2 a \operatorname{ch}^2 b + \sin^2 a \operatorname{sh}^2 b = \cos^2 a + \operatorname{sh}^2 b$$

d) $|\cos(ib)| \geq |\operatorname{sh} b| \to +\infty$. $\cos(iy) = \operatorname{ch} y = 2$ donne $z = \pm i \ln(2+\sqrt{3})$.

Réponse. $\cos(ix) = \operatorname{ch} x$, $\sin(ix) = i\operatorname{sh} x$; $|\cos(a+ib)|^2 = \cos^2 a + \operatorname{sh}^2 b$; $\cos z = 2$ pour $z = \pm i \ln(2+\sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude de ln(ch x)

a) $\operatorname{ch} x \geq 1 > 0$, paire, et $\ln(\operatorname{ch} x) \geq \ln 1 = 0$.

b) $f' = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} = \operatorname{th}$, $f'' = 1 - \operatorname{th}^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2} > 0$: convexe, décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$, minimum 0 en 0.

c) Pour $x \geq 0$: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x}{2}(1+e^{-2x})$, d'où la formule, puis par parité. Donc

$$f(x) - (|x| - \ln 2) = \ln\left(1+e^{-2|x|}\right) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

— asymptotes $y = \pm x - \ln 2$ (numériquement $f(5) \approx 4{,}30690$ et $5 - \ln 2 \approx 4{,}30685$).

d) $\ln(1+e^{-2|x|}) > 0$: courbe **au-dessus** des asymptotes. En 0, $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donne $f(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$: la parabole osculatrice.

Réponse. $f' = \operatorname{th}$, $f'' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$; asymptotes $y = \pm x - \ln 2$, courbe au-dessus ; $f \sim \dfrac{x^2}{2}$ en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).