Plaquette 5 – Problèmes de synthèse sur les fonctions usuelles

Fonctions usuelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Réciproques : une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur $f(I)$, et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ là où $f' \neq 0$.

— **Puissance variable** : $u^v = \mathrm{e}^{v \ln u}$; on étudie $v \ln u$.

— **Taux d'accroissement** : $\lim_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = \ln a$.

— **Identités** par dérivation : si $f' = 0$ sur un intervalle, f y est constante.

— **Convexité** :

$$\ln(ta + (1-t)b) \geq t \ln a + (1-t) \ln b \quad (a, b > 0,\ t \in [0,1])$$

Correction de l'exercice 1 – Étude de x^x

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x \ln x}$, $f'(x) = (\ln x + 1) x^x$: décroissante sur $\left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, croissante ensuite.

b) $x \ln x \to 0$ (croissances comparées) : $f(x) \to 1$; prolongement $f(0) = 1$.

c) $\dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot \ln x \sim \ln x \to -\infty$: tangente verticale, non dérivable.

d)

$$\min f = f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \approx 0{,}692 > \frac{1}{2}$$

Réponse. $f' = (1 + \ln x) x^x$; $f \to 1$ en 0 (tangente verticale) ; minimum $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \approx 0{,}692$.

Correction de l'exercice 2 – Solutions de arctan x = x/2

a) arctan et $x \mapsto \frac{x}{2}$ sont impaires.

b) $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1 - x^2}{2(1+x^2)}$: g croît sur $[0,1]$, décroît sur $[1, +\infty[$; $g(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} > 0$, $g \to -\infty$.

c) Sur $]0,1]$, $g > g(0) = 0$; sur $[1, +\infty[$, g décroît strictement de $g(1) > 0$ à $-\infty$: une unique racine $\alpha > 1$. Avec 0 et $-\alpha$:

$$S = \{-\alpha, 0, \alpha\}$$

d) $g(2) = 1{,}107 - 1 > 0$ et $g(3) = 1{,}249 - 1{,}5 < 0$: $\alpha \in]2,3[$ ($\approx 2{,}3311$).

Réponse. Trois solutions 0, $\pm\alpha$ avec $\alpha \approx 2{,}331 \in]2,3[$.

Correction de l'exercice 3 – Inégalité de Young

a) $\ln'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$; inégalité de concavité avec $t = \frac{1}{p}$, $1 - t = \frac{1}{q}$.

b) $\ln\left(\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}\right) \geq \ln a + \ln b = \ln(ab)$, puis exp croissante :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

c) $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$: c'est $(a-b)^2 \geq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $ab = 6$ et $\frac{8}{3} + \frac{3^{3/2}}{3/2} = 2{,}667 + 3{,}464 = 6{,}131 \geq 6$ ✓

Réponse. $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ par concavité de ln ; $p = q = 2$: $2ab \leq a^2 + b^2$.

Correction de l'exercice 4 – Le logarithme comme limite

a) $a^{1/n} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln a}{n}} - 1$ et $\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \to 1$:

$$n\left(a^{1/n} - 1\right) = \ln a \cdot \frac{\mathrm{e}^{\ln a/n} - 1}{\ln a/n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln a$$

b) 0,69339 contre $\ln 2 \approx 0{,}69315$: erreur $\approx 2{,}4 \times 10^{-4}$ (d'ordre $\frac{(\ln a)^2}{2n}$).

c) $\mathrm{e}^u - 1 \geq u$ avec $u = \frac{\ln a}{n}$, multiplié par $n > 0$.

d) $a^{1/2^k}$ s'obtient par k racines carrées successives ; $2^k(a^{1/2^k} - 1)$ approche $\ln a$ (méthode de Briggs, XVII$^{\mathrm{e}}$ siècle, pour ses tables de logarithmes).

Réponse. $n(a^{1/n} - 1) \to \ln a$ par excès ; $a = 2$, $n = 1000$: 0,69339.

Correction de l'exercice 5 – L'équation fonctionnelle du logarithme

a) $x = y = 1$: $f(1) = 2f(1)$. Puis $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$.

b) $g(s+t) = f(\mathrm{e}^s\mathrm{e}^t) = g(s) + g(t)$; par la plaquette 2 (additive continue), $g(t) = g(1)t$.

c) $f(x) = g(\ln x) = c \ln x$ avec $c = f(\mathrm{e})$. Réciproquement, $c\ln$ convient :

$$f(x) = c \ln x$$

d) $c \ln 10 = 1$: $f(x) = \frac{\ln x}{\ln 10} = \log_{10} x$.

Réponse. $f(x) = c \ln x$; avec $f(10) = 1$: $f = \log_{10}$.

Correction de l'exercice 6 – Gudermann par l'exponentielle

a) $h'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}} = \frac{2}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.

b) $\arctan(\operatorname{sh} x)$ a la même dérivée (plaquette 4) ; les deux fonctions valent 0 en 0 ($2\arctan 1 - \frac{\pi}{2} = 0$) : elles sont égales sur $\mathbb{R}$.

$$2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2} = \arctan(\operatorname{sh} x)$$

c) $x = 0{,}8$: 0,726205 des deux côtés ✓

d) $\mathrm{e}^x \to +\infty$: $h \to 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$; c'est l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{2}$.

Réponse. $h' = \frac{1}{\operatorname{ch}}$, $h = \arctan \circ \operatorname{sh}$; limite $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – La fonction softplus

a) $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \in]0, 1[$; $f' = \frac{\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2} > 0$.

b) $f \to 0$ en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$; $f(x) - x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) \to 0$.

c) Pour $x \geq 0$: $f(x) - x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) \in]0, \ln 2]$. Pour $x < 0$: $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x) \in]0, \ln 2[$.

$$\max(0, x) < \ln(1 + \mathrm{e}^x) \leq \max(0, x) + \ln 2$$

d) $\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) \sim \mathrm{e}^{-x}$: en $x = 5$, 0,006715 contre $\mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}006738$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f' = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, f convexe ; asymptote $y = x$; $\max(0,x) < f \le \max(0,x) + \ln 2$.

Correction de l'exercice 8 – Étude de sh x / x

a) $\frac{\operatorname{sh} x}{x} \to \operatorname{sh}'(0) = 1$; quotient de deux fonctions impaires.

b) $\operatorname{sh} x \ge x$ pour $x \ge 0$, et parité.

c) $g'(x) = \frac{x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{x^2}$; $k(x) = x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ vérifie $k'(x) = x\operatorname{sh} x \ge 0$ et $k(0) = 0$, donc $k \ge 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

d) C'est $k \ge 0$. En $+\infty$, $\operatorname{sh} x \sim \frac{\mathrm{e}^x}{2}$:

$$g(x) \sim \frac{\mathrm{e}^x}{2x}$$

Réponse. g paire, $g \ge 1$, croissante sur $\mathbb{R}_+$; $\operatorname{sh} x \le x\operatorname{ch} x$; $g \sim \frac{\mathrm{e}^x}{2x}$.

Correction de l'exercice 9 – Datation au carbone 14

a) $\mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$: $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$.

b) $\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0{,}3$:

$$t = \frac{\ln(1/0{,}3)}{\ln 2} \times 5730 \approx 9950 \text{ ans}$$

c) $\mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-t\ln 2/T} = 2^{-t/T}$.

d) $t(p) = -T\frac{\ln p}{\ln 2}$: $t(0{,}29) \approx 10\,230$ et $t(0{,}31) \approx 9\,680$ ans, soit $\approx \pm 280$ ans (la dérivée $|t'(p)| = \frac{T}{p\ln 2} \approx 27\,600$ ans par unité, soit 276 ans par point).

Réponse. $\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$; âge $\approx 9\,950$ ans ; incertitude $\approx \pm 280$ ans.

Correction de l'exercice 10 – Échelles logarithmiques

a) $10\log_{10} 2 \approx 3{,}01$ dB ; $+10$ dB ; $+20$ dB.

b) Intensité doublée : $60 + 3 = 63$ dB (et non 120 dB).

$$10\log_{10}\frac{2I}{I_0} = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} + 10\log_{10} 2$$

c) $-\log_{10}\frac{[\mathrm{H}^+]}{1000} = \mathrm{pH} + 3$: le pH augmente de 3.

d) Les intensités couvrent 12 ordres de grandeur, ramenés à l'échelle 0–120 dB ; de plus, la perception humaine est approximativement logarithmique (loi de Weber-Fechner).

Réponse. Doubler : +3 dB ; ×10 : +10 dB ; deux sources de 60 dB : 63 dB ; pH +3.

Correction de l'exercice 11 – Limite d'une moyenne de puissances

a) Calculs directs ; $M(-1) = \left(\frac{1/a + 1/b}{2}\right)^{-1}$ (moyenne harmonique).

b) $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a} = 1 + x\ln a + o(x)$, donc $\frac{a^x + b^x}{2} = 1 + \frac{x}{2}(\ln a + \ln b) + o(x)$.

c) $\ln(1+u) \sim u$:

$$\ln M(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}\ln(ab) + o(x)\right) \to \frac{1}{2}\ln(ab), \qquad M(x) \to \sqrt{ab}$$

d) $M(10^{-3}) \approx 2{,}00048$ et $M(10^{-5}) \approx 2{,}000005$ ✓ La moyenne géométrique est la moyenne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

« d'exposant 0 ».

Réponse. $M(1)$ = moyenne arithmétique, $M(-1)$ = harmonique, $M(x) \to \sqrt{ab}$ en 0.

Correction de l'exercice 12 – Encadrement polynomial du logarithme

a) $u(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$: $u'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$, $u(0) = 0$. La majoration est classique.

b) De même $v(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ a $v' = \frac{x^3}{1+x} \geq 0$. D'où $\frac{1}{2} - \frac{x}{3} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

c) $0{,}1 - 0{,}005 = 0{,}095 \leq \ln 1{,}1 \leq 0{,}095 + 0{,}00034$: $\ln 1{,}1 \approx 0{,}0953$.

d) $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 1 - \frac{1}{2n}$ par a) ; puis $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{1 - 1/(2n)} = \mathrm{e}\left(1 - \mathrm{e}^{-1/(2n)}\right) \leq \frac{\mathrm{e}}{2n}$.

Réponse. $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$; limite $\frac{1}{2}$; $\ln 1{,}1 \approx 0{,}0953$; $\mathrm{e} - (1 + \frac{1}{n})^n \leq \frac{\mathrm{e}}{2n}$.

Correction de l'exercice 13 – Une fonction définie par deux arcsinus

a) $\theta = \arccos|x| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\theta = \sqrt{1 - x^2}$: comme θ est dans l'intervalle de arcsin, $\theta = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$.

b) Pour $x \geq 0$: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

c) Pour $x \leq 0$: $\arccos|x| = \arccos(-x) = \pi - \arccos x = \pi - \frac{\pi}{2} + \arcsin x$, donc

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\arcsin x$$

d) Palier à $\frac{\pi}{2}$ sur $[0,1]$, arc croissant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ sur $[-1,0]$. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ ✓ (et $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$ par la définition).

Réponse. $f = \frac{\pi}{2}$ sur $[0,1]$, $\frac{\pi}{2} + 2\arcsin x$ sur $[-1,0]$; $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 14 – argsh et logarithme à l'infini

a) $\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln(2x) + \ln\frac{1 + \sqrt{1 + x^{-2}}}{2}$, et le dernier terme tend vers $\ln 1 = 0$.

b) $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u)$ avec $u = x^{-2}$: $\frac{1 + \sqrt{1+u}}{2} = 1 + \frac{u}{4} + o(u)$ et $\ln(1+v) \sim v$:

$$\operatorname{argsh} x - \ln(2x) \sim \frac{1}{4x^2}$$

c) $x = 10$: $0{,}002491$ contre $\frac{1}{400} = 0{,}0025$ ✓

d) $\sqrt{1-u} = 1 - \frac{u}{2} + o(u)$: $\operatorname{argch} x - \ln(2x) \sim -\frac{1}{4x^2}$. Les deux courbes ont la même « asymptote » logarithmique $\ln(2x)$, argsh au-dessus, argch en dessous.

Réponse. $\operatorname{argsh} x = \ln(2x) + \frac{1}{4x^2} + o(\frac{1}{x^2})$; $\operatorname{argch} x = \ln(2x) - \frac{1}{4x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la fonction W de Lambert

a) $\varphi'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x > 0$ sur $]-1, +\infty[$; $\varphi(-1) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\varphi \to +\infty$: bijection continue strictement croissante.

b) $W(0) = 0$; $W(\mathrm{e}) = 1$ ($1 \cdot \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$) ; $W(2\ln 2) = \ln 2$ ($\ln 2 \cdot \mathrm{e}^{\ln 2} = 2\ln 2$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $W'(y) = \dfrac{1}{\varphi'(W(y))} = \dfrac{1}{(1+W)\mathrm{e}^{W}}$ et $\mathrm{e}^{W} = \dfrac{y}{W}$ (pour $y \neq 0$) :

$$W'(y) = \frac{W(y)}{y\,(1+W(y))}$$

d) $x = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow x\mathrm{e}^{x} = 1 \Leftrightarrow x = W(1)$ (valeur 0,567143 déjà rencontrée).
$2^{x} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x\mathrm{e}^{x\ln 2} = 1 \Leftrightarrow (x\ln 2)\mathrm{e}^{x\ln 2} = \ln 2$, donc $x = \dfrac{W(\ln 2)}{\ln 2}$ ($\approx 0{,}641$).

Réponse. W réciproque de $x\mathrm{e}^{x}$; $W(\mathrm{e}) = 1$, $W(2\ln 2) = \ln 2$; $x = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow x = W(1)$; $2^{x} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{W(\ln 2)}{\ln 2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).