Plaquette 1 – Exponentielle, logarithme, puissances et réciproques

Fonctions usuelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On révise les propriétés algébriques et analytiques de exp, ln, x^α, des fonctions circulaires réciproques (arctan) et des fonctions hyperboliques ; on résout des équations, on détermine des domaines, on dérive, et on compare les croissances.

Exercice 1 – Domaines de définition

Déterminer le domaine de définition de :

a) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$

c) $h(x) = \sqrt{\ln x}$

Exercice 2 – Équations exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 2 = 0$

b) $\mathrm{e}^x = 5$

Exercice 3 – Équations logarithmiques

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln(x) + \ln(x-3) = \ln(4)$.

Exercice 4 – Inéquation

Résoudre $\ln(2x - 1) \leq 1$.

Exercice 5 – Dérivées

Calculer la dérivée de :

a) $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$

b) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

c) $h(x) = \ln(1 + x^2)$

Exercice 6 – Croissances comparées

Calculer les limites :

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$

b) $\lim_{x\to+\infty} x - \ln x$

c) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Limites de référence

Calculer :

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 2x)}{x}$

Exercice 8 – Puissances réelles

Soit $f(x) = x^x$ pour $x > 0$.

a) Écrire $f(x)$ sous forme exponentielle.

b) Calculer $f'(x)$.

c) Déterminer le minimum de f.

Exercice 9 – Arc tangente

a) Donner $\arctan 0$, $\arctan 1$ et $\lim_{x \to +\infty} \arctan x$.

b) Calculer la dérivée de $x \mapsto \arctan(2x)$.

Exercice 10 – Fonctions hyperboliques

a) Démontrer que $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

b) Calculer ch' et sh'.

Exercice 11 – Étude d'une fonction

Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

a) Calculer f' et dresser le tableau de variations.

b) Donner les limites en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 12 – Comparer deux nombres

Comparer e^{π} et π^e.

Exercice 13 – Arc sinus et arc cosinus

a) Rappeler les ensembles de départ et d'arrivée de arcsin et arccos, et calculer $\arcsin \frac{1}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right)$.

b) Montrer que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ sur $]-1, 1[$ (dérivée d'une réciproque).

c) Montrer que $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$ (dériver, puis évaluer en 0).

d) Simplifier $\cos(\arcsin x)$ et $\tan(\arcsin x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Tangente hyperbolique et sa réciproque

Soit $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

a) Montrer que th est impaire, strictement croissante, et que $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$.

b) Déterminer ses limites en $\pm\infty$; en déduire que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

c) Résoudre $\operatorname{th} x = y$ pour $y \in]-1, 1[$ (poser $X = \mathrm{e}^{2x}$) et en déduire la réciproque.

d) Calculer $\operatorname{th}(\ln 2)$ et vérifier c).

Exercice 15 – Synthèse : équation mixte

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 6 = 0$, puis $\ln^2 x - \ln x - 6 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).