Plaquette 2 – Exponentielles, logarithmes et puissances

Fonctions usuelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Toute puissance réelle se ramène à l'exponentielle : $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$. Pour comparer, résoudre ou étudier une limite de la forme u^v, on passe au **logarithme**, on étudie $v\ln u$, puis on revient par exp. Les inégalités de convexité $\ln(1+x) \le x$ et $\mathrm{e}^x \ge 1+x$ fournissent l'essentiel des encadrements ; les croissances comparées tranchent les formes indéterminées.

Exercice 1 – L'équation x^y = y^x

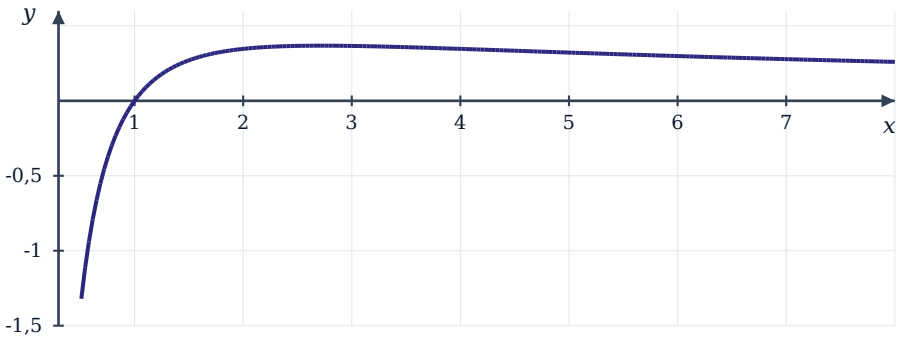
On cherche les couples (x, y) de réels > 0, $x < y$, tels que $x^y = y^x$.

a) Montrer que l'équation équivaut à $f(x) = f(y)$ avec $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$.

b) En étudiant f (maximum en e), montrer que nécessairement $1 < x < \mathrm{e} < y$.

c) En déduire que le seul couple d'entiers est $(2, 4)$.

d) Vérifier que $x = \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$, $y = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}$ $(t > 0)$ est solution.



La courbe de f(t) = ln t / t

Exercice 2 – Logarithmes de base quelconque

a) Montrer que $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$ et $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

b) Résoudre $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \dfrac{11}{2}$.

c) Combien de chiffres a 2^{2026} en écriture décimale ? (on donne $\log_{10} 2 \approx 0{,}30103$)

d) Résoudre $\log_x 4 = \dfrac{1}{2}$ (attention au domaine).

Exercice 3 – Formes indéterminées 1^∞

Calculer les limites en $+\infty$:

a) $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ (a réel).

b) $\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$ et $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

d) $x^{1/x}$ et $(\ln x)^{1/x}$.

Exercice 4 – Encadrement du logarithme

a) Montrer que $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ pour $x > -1$.

b) En déduire, pour $n \ge 1$, $\frac{1}{n+1} \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$.

c) En déduire l'encadrement $\mathrm{e}^{n/(n+1)} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \mathrm{e}$.

d) Donner une valeur de n garantissant $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right| \le 10^{-2}$.

Exercice 5 – L'équation fonctionnelle de l'exponentielle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que $f(x+y) = f(x)f(y)$.

a) Montrer que $f(0) = 1$ et que f ne s'annule jamais (si $f(x_0) = 0$, alors $f(x) = f(x_0)f(x-x_0) = 0$).

b) Montrer que $f > 0$ (écrire $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2$).

c) Soit $g = \ln f$. Montrer que $g(x+y) = g(x) + g(y)$ et en déduire $g(x) = xg(1)$ sur $\mathbb{Q}$, puis sur $\mathbb{R}$ par continuité et densité.

d) Conclure : $f(x) = a^x$ avec $a = f(1)$.

Exercice 6 – Étude de x^(1/x)

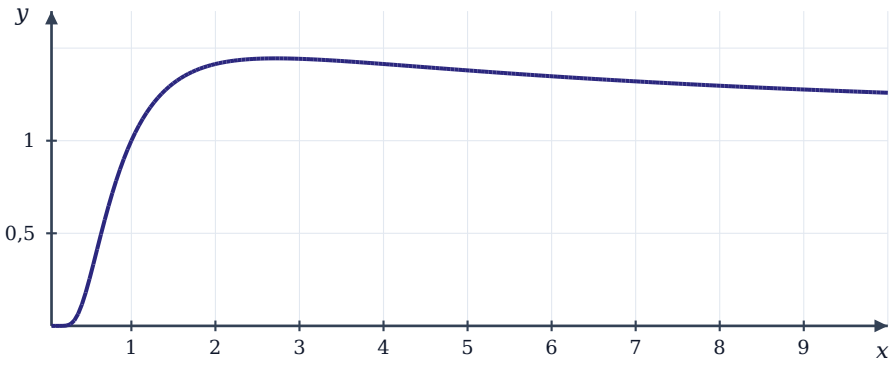
Soit $f(x) = x^{1/x}$ sur $]0, +\infty[$.

a) Écrire $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x / x}$ et calculer f'.

b) Dresser le tableau de variations ; donner le maximum.

c) Calculer les limites en 0^+ et en $+\infty$.

d) En déduire le plus grand des nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$.



La courbe de x ↦ x^(1/x)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Comparer 2^100 et 100^15

a) Comparer 2^{100} et 100^{15} en comparant leurs logarithmes (on donne $\ln 2 \approx 0{,}693147$, $\ln 10 \approx 2{,}302585$).

b) Comparer 3^{200} et 2^{300} sans calculatrice.

c) Pour quels entiers $n \geq 1$ a-t-on $2^n > n^{10}$? (Étudier $\frac{\ln x}{x}$ et tester quelques valeurs.)

d) Interpréter c) en termes de croissances comparées.

Exercice 8 – Démontrer les croissances comparées

a) Montrer que $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$.

b) En l'appliquant à $\sqrt{x}$, montrer que $\ln x \leq 2\sqrt{x}$, puis que $\frac{\ln x}{x} \to 0$ en $+\infty$.

c) En déduire $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \to 0$ pour $\alpha, \beta > 0$ (poser $u = x^{\alpha/\beta}$).

d) En déduire $\frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} \to 0$ et $x^\alpha \ln x \to 0$ en 0^+.

Exercice 9 – Une équation avec l'exponentielle

a) Montrer que $\mathrm{e}^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$ et que l'inégalité est inversée pour $x \leq 0$.

b) En déduire que l'équation $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ a pour unique solution $x = 0$.

c) Résoudre $\mathrm{e}^x = 1 + x$.

d) Généraliser : que dire de $\mathrm{e}^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour $x \geq 0$?

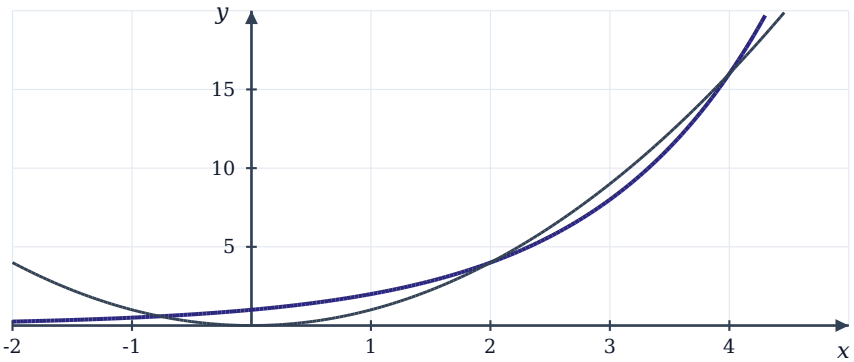
Exercice 10 – L'inéquation 2^x > x²

a) Vérifier que 2 et 4 sont solutions de $2^x = x^2$.

b) Montrer qu'il existe une troisième solution $\alpha < 0$ et la localiser (on donne $\alpha \approx -0{,}7667$).

c) En étudiant $\varphi(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$ sur $]0, +\infty[$, montrer qu'il n'y a pas d'autre solution positive.

d) Résoudre $2^x > x^2$.



Les courbes de 2^x (épais) et de x²

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Les fonctions puissances

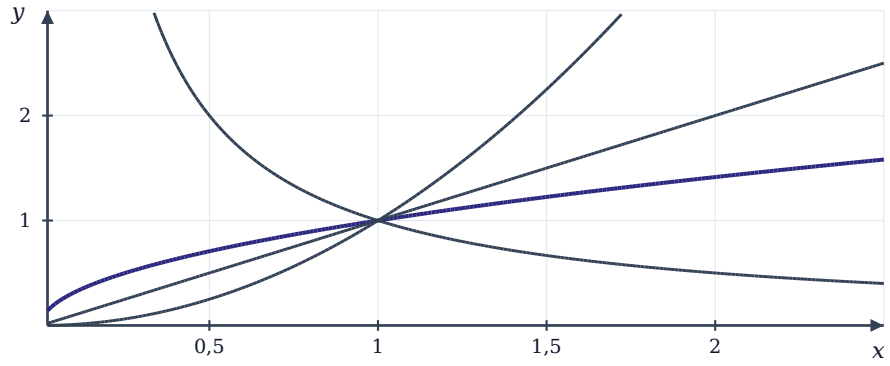
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $p_\alpha(x) = x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$.

a) Donner le sens de variation et la convexité selon α.

b) Étudier la limite en 0^+ et la tangente à l'origine (prolongement par continuité) selon que $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha < 0$.

c) Comparer $x^{1/2}$, x, x^2 sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

d) Montrer que $(x^a)^b = x^{ab}$ et $x^a x^b = x^{a+b}$.



x^(1/2) (épais), x, x² et x^(−1)

Exercice 12 – Encadrer ln(n!)

a) Montrer que pour $k \geq 2$: $\int_{k-1}^{k} \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln t \, dt$.

b) En déduire $n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n$ (une primitive de ln est $t \ln t - t$).

c) En déduire $\ln(n!) \sim n \ln n$.

d) Vérifier pour $n = 10$ ($\ln 10! \approx 15{,}104$).

Exercice 13 – Caractériser l'exponentielle par f' = f

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

a) Montrer que $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x}$ est constante.

b) En déduire $f = \exp$ (unicité).

c) Montrer de même que les solutions de $f' = af$ sont les $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$.

d) Application : une population croît de 3 % par an de façon continue ($N' = 0{,}03N$). En combien de temps double-t-elle ?

Exercice 14 – La moyenne logarithmique

Pour $0 < a < b$, on pose $L(a,b) = \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}$.

a) Calculer $L(1,4)$ et comparer à $G = \sqrt{ab}$ et $A = \dfrac{a+b}{2}$.

b) Montrer que $G \leq L$: avec $t = \sqrt{b/a} > 1$, cela revient à $2\ln t \leq t - \dfrac{1}{t}$; le démontrer par étude de fonction.

c) Montrer que $L \leq A$: cela revient à $\ln t \geq \dfrac{2(t-1)}{t+1}$ pour $t > 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Interpréter L comme valeur moyenne de x pour la mesure $\frac{\mathrm{d}x}{x}$: $L = \dfrac{\int_a^b \mathrm{d}x}{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}}$.

Exercice 15 – Synthèse : la suite (1 + 1/n)^n est croissante

Soit $g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ sur $]0,+\infty[$.

a) Montrer que $g'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

b) En utilisant l'exercice 4, montrer que $g' > 0$.

c) En déduire que $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est strictement croissante et converge vers e.

d) Montrer de même que $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ est décroissante ; en déduire $u_n < \mathrm{e} < v_n$ et $\mathrm{e} \approx 2{,}7$ avec $n = 10$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).