Plaquette 3 – Fonctions circulaires réciproques

Fonctions usuelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

arcsin, arccos et arctan sont les réciproques des restrictions de sin, cos, tan à des intervalles **choisis** ($\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $[0, \pi]$, $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$). Toute la difficulté est là : $\arcsin(\sin x) = x$ seulement si x est dans le bon intervalle. Pour prouver une identité, on **dérive** (fonction constante sur un intervalle, puis valeur en un point) ou on compare les **tangentes** en vérifiant que les angles sont dans un intervalle où tan est injective.

Exercice 1 – arctan x + arctan(1/x)

Soit $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) En déduire f sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ (attention : deux intervalles).

c) Retrouver le résultat géométriquement pour $x > 0$ (triangle rectangle de côtés 1 et x).

d) Calculer $\arctan 2 + \arctan \frac{1}{2}$ et $\arctan(-3) + \arctan\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 2 – La fonction arcsin(sin x)

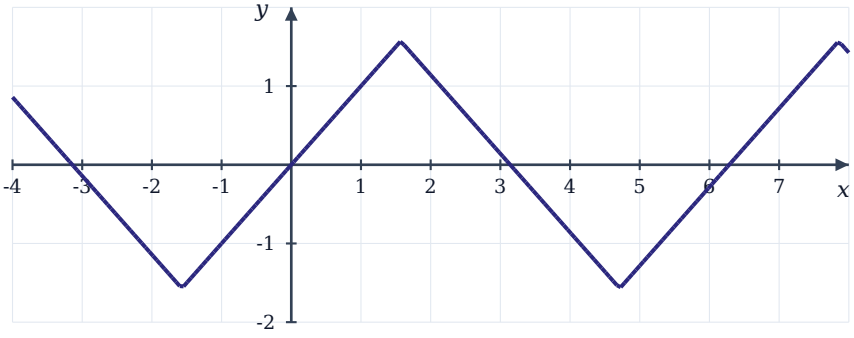
Soit $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire.

b) Simplifier $f(x)$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (utiliser $\sin x = \sin(\pi - x)$).

c) Tracer l'allure de f et vérifier sur la figure.

d) Calculer $\arcsin\left(\sin \frac{7\pi}{5}\right)$ et $\arcsin(\sin 10)$.



La courbe de $x \mapsto \arcsin(\sin x)$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – La fonction arccos(cos x)

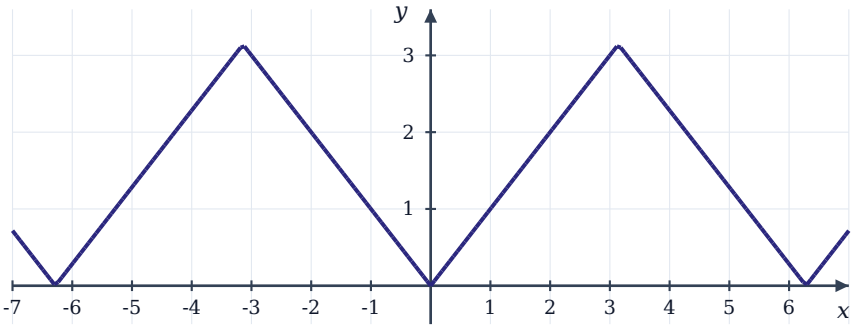
Soit $g(x) = \arccos(\cos x)$.

a) Donner sa période et sa parité.

b) Simplifier g sur $[0, \pi]$ et sur $[-\pi, 0]$.

c) En déduire $g(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$ et tracer.

d) Calculer $\arccos(\cos(-5))$ et résoudre $\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{3}$.



La courbe de $x \mapsto \arccos(\cos x)$

Exercice 4 – Une identité par dérivation

Soit $h(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

a) Montrer que h est définie sur $\mathbb{R}$ (étudier $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|$).

b) Calculer $h'(x)$ pour $|x| \neq 1$ et montrer que $h'(x) = \frac{2}{1+x^2}$ si $|x| < 1$, $-\frac{2}{1+x^2}$ si $|x| > 1$.

c) En déduire $h(x) = 2\arctan x$ sur $[-1, 1]$, et l'expression de h sur $]1, +\infty[$.

d) Vérifier avec $x = \tan\theta$: $\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin 2\theta$.

Exercice 5 – Résoudre une équation en arctan

On résout $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que toute solution vérifie $x > 0$ (le membre de gauche est une fonction strictement croissante, nulle en 0).

b) En prenant la tangente, obtenir $2x^2 + 3x - 1 = 0$.

c) Conclure (vérifier que la somme des angles est bien dans l'intervalle où tan est injective).

d) Contrôler numériquement.

Exercice 6 – Une équation mêlant arccos et arcsin

On résout $\arccos x = \arcsin(2x)$.

a) Déterminer le domaine et montrer que $x \geq 0$ nécessairement.

b) Appliquer sin aux deux membres et résoudre.

c) Vérifier la solution.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Résoudre de même $\arcsin x = \arccos x$.

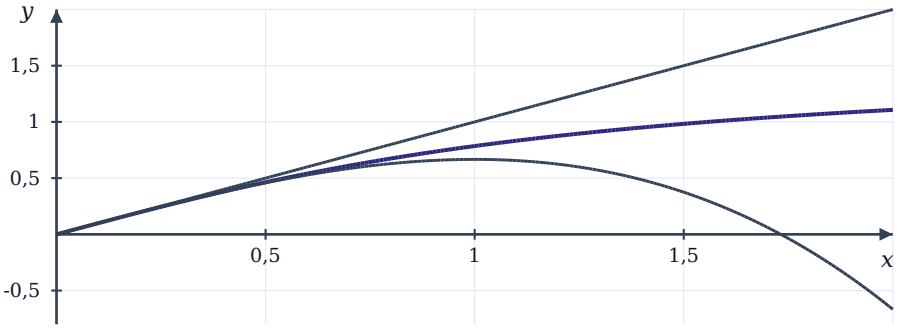
Exercice 7 – Encadrer arctan

a) Montrer que $\arctan x \le x$ pour $x \ge 0$.

b) Montrer que $x - \frac{x^3}{3} \le \arctan x$ pour $x \ge 0$ (dériver la différence).

c) En déduire $\lim_{x \to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \frac{1}{3}$ (encadrer, puis admettre la majoration $x - \arctan x \le \frac{x^3}{3}$ et chercher la minoration $\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$).

d) Estimer $\arctan 0{,}1$ à 10^{-4} près.



arctan (épais), y = x et y = x − x³/3

Exercice 8 – Une somme télescopique d'arctangentes

a) Montrer que $\arctan \frac{1}{2k^2} = \arctan(2k+1) - \arctan(2k-1)$ pour $k \ge 1$ (justifier que la différence est dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

b) En déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{2k^2} = \arctan(2n+1) - \frac{\pi}{4}$.

c) Montrer que $S_n = \arctan \frac{n}{n+1}$ et en déduire la limite.

d) Vérifier numériquement pour $n = 7$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Une fonction constante par morceaux

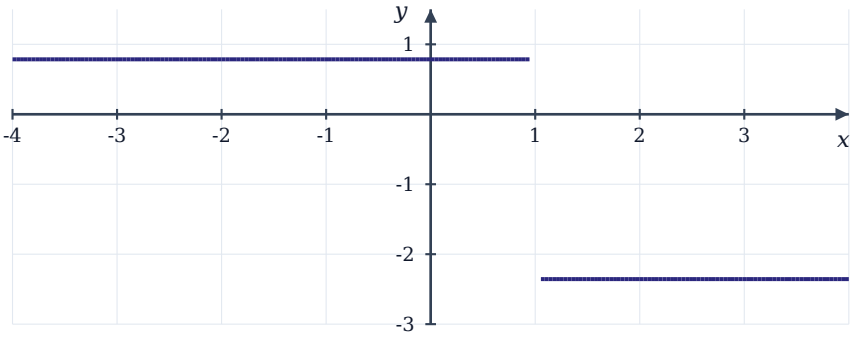
Soit $f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x$ pour $x \neq 1$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Déterminer f sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (valeur en 0 et limite en $+\infty$).

c) Retrouver le résultat par la formule d'addition : $\frac{1+x}{1-x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$ si $x = \tan\theta$.

d) Vérifier numériquement en $x = -3$, 0,3, 2.



La courbe de f : deux paliers

Exercice 10 – Arcsin et arccos de racines

a) Montrer que $\arcsin\sqrt{x} = \arccos\sqrt{1-x}$ pour $x \in [0, 1]$.

b) Montrer que $\arcsin\sqrt{x} = \arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ pour $x \in [0, 1[$.

c) Calculer la dérivée de $x \mapsto \arcsin\sqrt{x}$ sur $]0, 1[$.

d) En déduire une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0, 1[$.

Exercice 11 – Intégrales qui donnent π

a) Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ et $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$ (forme canonique).

c) Calculer $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3+x^2}$ (poser $x = \sqrt{3}u$).

d) Calculer l'aire sous $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ entre 0 et 1.

Exercice 12 – Argument d'un nombre complexe par arctan

Soit $z = x + iy$ non réel négatif, de module r.

a) Montrer que si $x > 0$, un argument de z est $\arctan\frac{y}{x}$.

b) Montrer que $\theta = 2\arctan\frac{y}{x+r}$ est un argument de z dans tous les cas (formule de l'angle moitié).

c) Calculer un argument de $-1 + i$ par b), et vérifier.

d) Pourquoi la formule a) échoue-t-elle pour $x < 0$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Réciproque de sin sur un autre intervalle

a) Montrer que sin réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.

b) Exprimer sa réciproque g à l'aide de arcsin.

c) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et vérifier.

d) Exprimer de même la réciproque de tan restreinte à $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 14 – Arcsin : encadrement et limite

a) Montrer que $\arcsin x \geq x$ pour $x \in [0, 1]$.

b) Montrer que $\arcsin x \leq \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0, 1[$ (dériver la différence, ou utiliser $\theta \leq \tan\theta$).

c) En déduire $\lim_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$.

d) Montrer que $\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x \sim \sqrt{2(1-x)}$ quand $x \to 1^-$ (poser $x = \cos t$).

Exercice 15 – Synthèse : étude de x arctan x

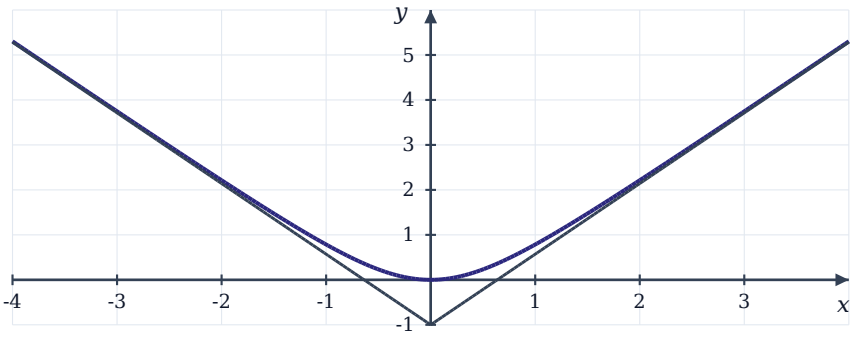
Soit $f(x) = x \arctan x$.

a) Montrer que f est paire, positive, et calculer f' et f''.

b) En déduire que f est convexe et étudier ses variations.

c) Montrer que $f(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - 1\right) \to 0$ en $+\infty$ (utiliser $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$) : asymptote oblique.

d) Préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote.



La courbe de x arctan x et ses asymptotes

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).