Plaquette 4 – Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

Fonctions usuelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Les fonctions hyperboliques se manipulent en revenant à l'**exponentielle** : $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Une équation en ch, sh devient une équation du second degré en $X = e^x > 0$; une réciproque s'obtient en résolvant $y = \operatorname{sh} x$ pour x. Les formules ressemblent à celles de la trigonométrie, à des **signes** près (règle d'Osborn : changer le signe de tout produit de deux sh).

Exercice 1 – Formules d'addition hyperboliques

a) Démontrer $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$ en développant avec les exponentielles.

b) En déduire $\operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$ et $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

c) Linéariser $\operatorname{sh}^3 x$ (on trouvera $\frac{\operatorname{sh} 3x - 3\operatorname{sh} x}{4}$).

d) Comparer avec les formules trigonométriques correspondantes (règle d'Osborn).

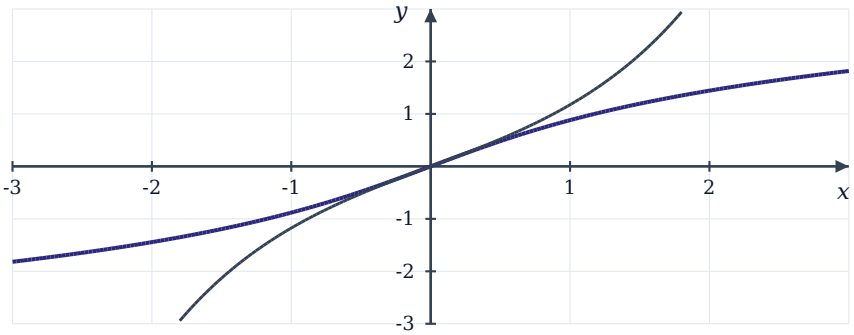
Exercice 2 – Argument sinus hyperbolique

a) Montrer que sh est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Résoudre $\operatorname{sh} x = y$ en posant $X = e^x$; en déduire $\operatorname{argsh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

c) Calculer la dérivée de argsh de deux façons.

d) Calculer $\operatorname{argsh} 1$ et $\operatorname{argsh} \frac{3}{4}$.



argsh (épais) et sh, symétriques par rapport à $y = x$

Exercice 3 – Argument cosinus hyperbolique

a) Montrer que ch réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

b) Montrer que sa réciproque est $\operatorname{argch} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch} x = 2$.

d) Calculer $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Équations hyperboliques

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\operatorname{sh} x = \frac{3}{4}$.

b) $2\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = 2$.

c) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = 3$ et $\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x = 1$.

d) $\operatorname{th} x = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 – Somme de cosinus hyperboliques

Soit $x \neq 0$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$.

a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx}$ et $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-kx}$.

b) En factorisant par les « demi-angles », montrer que $C_n = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{ch}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$.

c) Vérifier numériquement pour $n = 5$, $x = 0{,}4$.

d) Comparer avec la formule de $\sum \cos(kx)$.

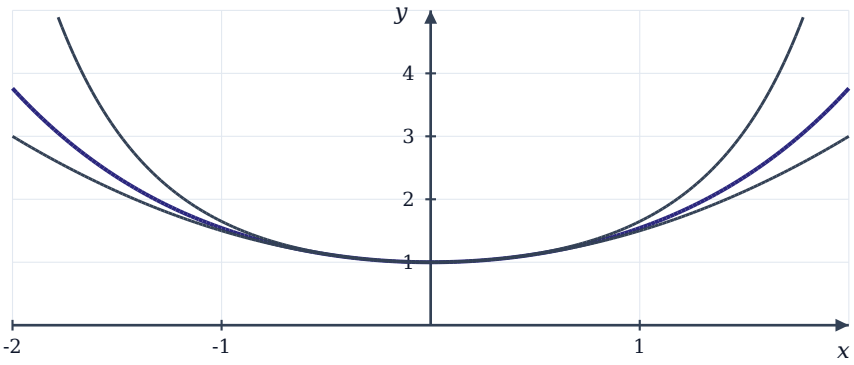
Exercice 6 – Inégalités hyperboliques

a) Montrer que $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ pour tout réel x.

b) Montrer que $\operatorname{sh} x \geq x$ pour $x \geq 0$ et $|\operatorname{th} x| \leq |x|$.

c) Montrer que $\operatorname{ch} x \leq \mathrm{e}^{x^2/2}$ pour tout réel x (comparer les séries, ou admettre : $\frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{x^{2k}}{2^k k!}$).

d) En déduire l'encadrement $1 + \frac{x^2}{2} \leq \operatorname{ch} x \leq \mathrm{e}^{x^2/2}$ et le vérifier pour $x = 1$.



ch (épais) entre 1 + x²/2 et e^(x²/2)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – La chaînette

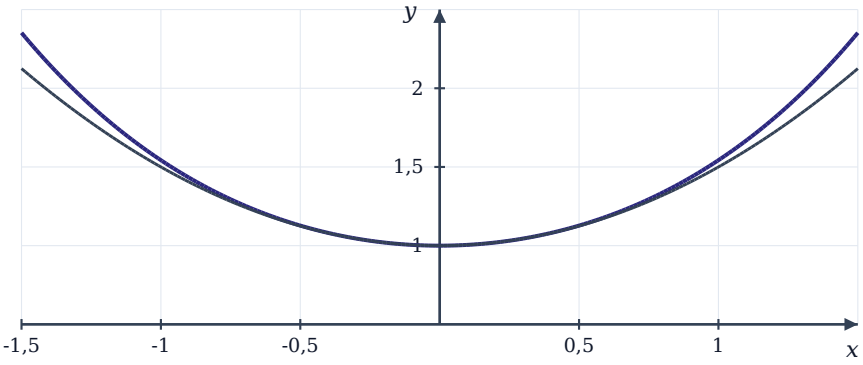
Un câble pesant suspendu entre deux points à la même hauteur prend la forme $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ ($a > 0$).

a) Calculer y' et $1 + y'^2$.

b) La longueur de l'arc entre $-b$ et b est $\int_{-b}^{b}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$. Montrer qu'elle vaut $2a\operatorname{sh}\frac{b}{a}$.

c) Calculer la flèche $f = y(b) - y(0)$.

d) Application : $a = 1$, $b = 1$; comparer la longueur à la distance entre les points d'attache.



La chaînette y = ch x (épais) et la parabole 1 + x²/2

Exercice 8 – La fonction de Gudermann

Soit $\mathrm{gd}(x) = \arctan(\operatorname{sh} x)$.

a) Montrer que gd est impaire, strictement croissante, à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Calculer $\mathrm{gd}'(x)$ et montrer que $\mathrm{gd}' = \frac{1}{\operatorname{ch}}$.

c) Montrer que $\tan(\mathrm{gd}\,x) = \operatorname{sh} x$ et $\cos(\mathrm{gd}\,x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.

d) En déduire une primitive de $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ et calculer $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$.

Exercice 9 – Tangente hyperbolique et addition des vitesses

a) Montrer que $\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$.

b) En relativité, on associe à une vitesse v ($|v| < c$) sa « rapidité » φ telle que $\frac{v}{c} = \operatorname{th}\varphi$; les rapidités s'additionnent. En déduire la loi de composition $w = \frac{u+v}{1+uv/c^2}$.

c) Calculer w pour $u = v = 0{,}8c$.

d) Montrer que $|w| < c$ dès que $|u|, |v| < c$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

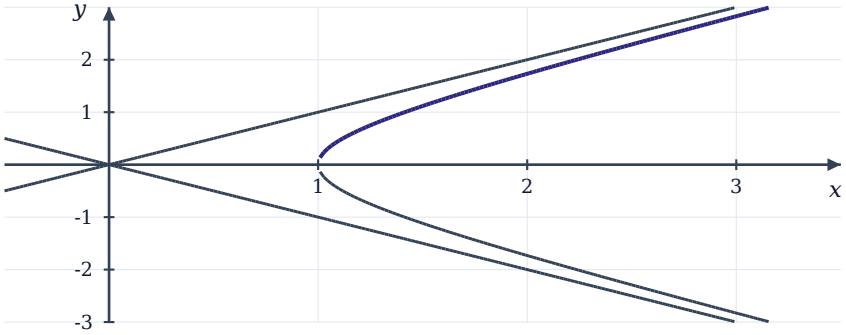
Exercice 10 – Hyperbole et paramétrage

a) Montrer que le point $M(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ décrit la branche $x > 0$ de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$.

b) Montrer que $t \mapsto M(t)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur cette branche.

c) Donner la tangente en $M(t)$ et ses asymptotes $y = \pm x$.

d) Comparer avec le paramétrage du cercle par $(\cos t, \sin t)$: que devient « t » ?



L'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ (branche $x > 0$) et ses asymptotes

Exercice 11 – Dérivées de argth et intégrales

a) Montrer que $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ a pour dérivée $\frac{1}{1-x^2}$ sur $]-1, 1[$.

b) Décomposer $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$ et retrouver la primitive.

c) Calculer $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$.

d) Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; comparer argsh et arctan.

Exercice 12 – Dérivées successives et parité

a) Exprimer $\operatorname{ch}^{(n)}$ et $\operatorname{sh}^{(n)}$ selon la parité de n.

b) Décomposer exp en parties paire et impaire et identifier ch, sh.

c) Montrer que les solutions de $y'' = y$ sont les $\alpha\operatorname{ch} + \beta\operatorname{sh}$ (poser $z = y' - y$, puis $y' + y$).

d) Résoudre $y'' = y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, puis $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

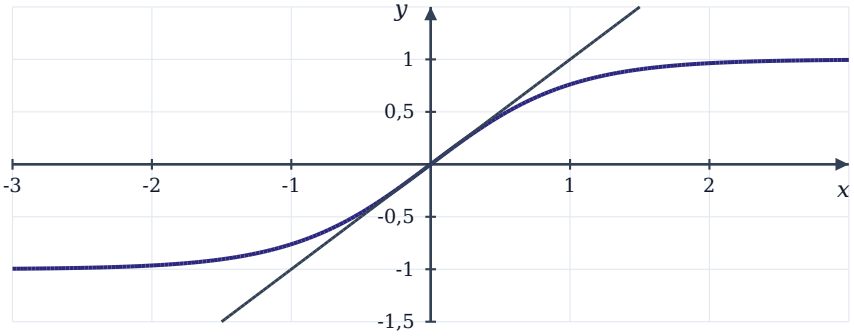
Exercice 13 – Étude de la tangente hyperbolique

a) Montrer que $\operatorname{th} x = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$.

b) En déduire les limites, et que $1 - \operatorname{th} x \sim 2e^{-2x}$ en $+\infty$.

c) Montrer que th est concave sur $\mathbb{R}_+$ ($\text{th}'' = -2\text{th}(1-\text{th}^2)$).

d) Tracer l'allure et donner la tangente en 0.



th (épais) et sa tangente en 0

Exercice 14 – Hyperboliques et complexes

a) Montrer que $\cos(ix) = \operatorname{ch} x$ et $\sin(ix) = i\operatorname{sh} x$ (formules d'Euler prolongées aux complexes).

b) Retrouver $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ à partir de $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

c) Calculer $|\cos(a+ib)|^2$ et montrer qu'il vaut $\cos^2 a + \operatorname{sh}^2 b$.

d) En déduire que cos n'est pas bornée sur $\mathbb{C}$; résoudre $\cos z = 2$ ($z = iy$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : étude de ln(ch x)

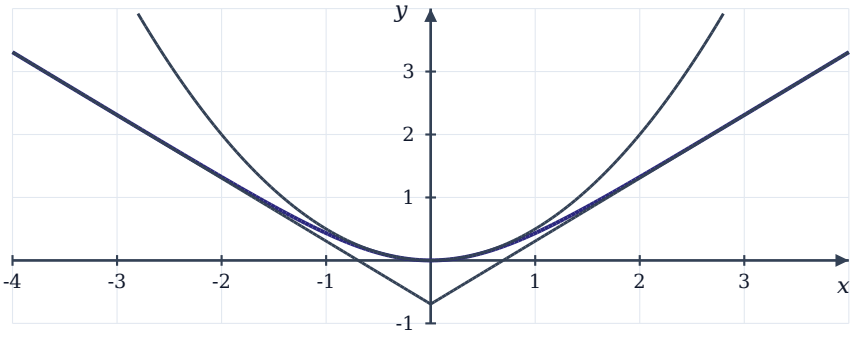
Soit $f(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.

a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, paire, positive.

b) Calculer f' et f'' ; en déduire variations et convexité.

c) Montrer que $f(x) = |x| - \ln 2 + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2|x|}\right)$ et en déduire les asymptotes.

d) Position de la courbe par rapport aux asymptotes, et comparaison avec $\dfrac{x^2}{2}$ au voisinage de 0.



ln(ch x) (épais), ses asymptotes et la parabole x²/2

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).