Plaquette 5 – Problèmes de synthèse sur les fonctions usuelles

Fonctions usuelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Ces problèmes mêlent exponentielle, logarithme, puissances, fonctions circulaires et hyperboliques. Les réflexes : passer au logarithme pour une puissance variable, dériver pour prouver une identité ou une inégalité, raisonner sur des **intervalles** (une dérivée nulle ne donne une constante que sur un intervalle), et vérifier numériquement chaque formule. Plusieurs exercices débouchent sur des modèles concrets (radioactivité, décibels, relativité) ou sur des fonctions « nouvelles » définies comme réciproques.

Exercice 1 – Étude de x^x

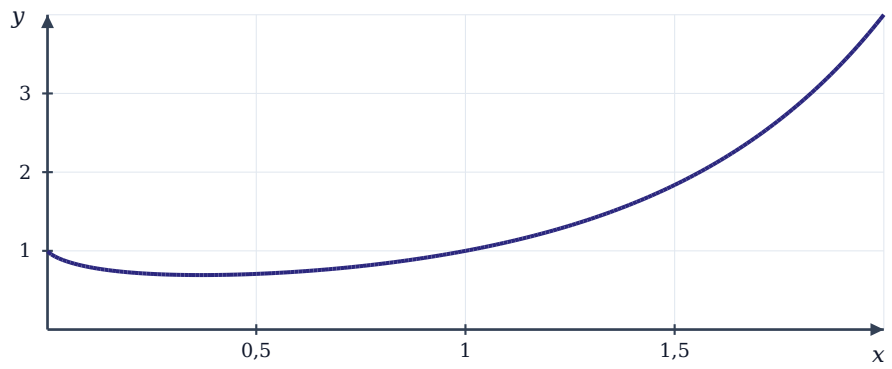
Soit $f(x) = x^x$ sur $]0, +\infty[$.

a) Calculer f' et dresser le tableau de variations.

b) Calculer la limite en 0^+ ; peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

c) Le prolongement est-il dérivable en 0 ?

d) Donner le minimum de f et le comparer à $\frac{1}{2}$.



La courbe de x ↦ x^x

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Solutions de arctan x = x/2

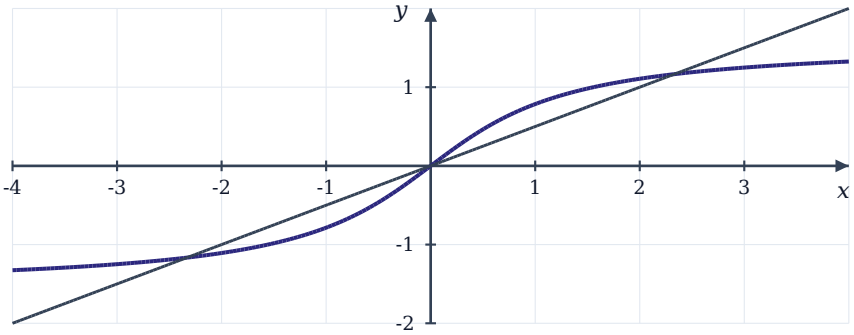
On étudie l'équation $\arctan x = \frac{x}{2}$.

a) Montrer que 0 est solution et que l'ensemble des solutions est symétrique.

b) Étudier $g(x) = \arctan x - \frac{x}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$ (dérivée, maximum, limite).

c) En déduire que l'équation a exactement trois solutions.

d) Localiser la solution positive (on donne $\alpha \approx 2{,}3311$).



arctan (épais) et la droite y = x/2

Exercice 3 – Inégalité de Young

Soient $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a, b > 0$.

a) Justifier la concavité de ln et l'inégalité $\ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y$.

b) En l'appliquant à $x = a^p$, $y = b^q$, montrer l'inégalité de Young : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

c) Cas $p = q = 2$: quelle inégalité retrouve-t-on ?

d) Vérifier pour $p = 3$, $q = \frac{3}{2}$, $a = 2$, $b = 3$.

Exercice 4 – Le logarithme comme limite

Soit $a > 0$.

a) Montrer que $n\left(a^{1/n} - 1\right) \to \ln a$ quand $n \to +\infty$.

b) Vérifier numériquement pour $a = 2$, $n = 1000$ (on trouve $\approx 0{,}69339$).

c) Montrer que $n\left(a^{1/n} - 1\right) \geq \ln a$ (utiliser $e^u \geq 1 + u$) : l'approximation est par excès.

d) Interpréter comme une méthode de calcul de $\ln a$ avec des racines carrées successives ($n = 2^k$).

Exercice 5 – L'équation fonctionnelle du logarithme

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $f(xy) = f(x) + f(y)$.

a) Montrer que $f(1) = 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

b) Soit $g(t) = f(e^t)$. Montrer que g est additive et continue ; en déduire $g(t) = ct$.

c) En déduire $f(x) = c\ln x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Si de plus $f(10) = 1$, que vaut f ?

Exercice 6 – Gudermann par l'exponentielle

Soit $h(x) = 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$.

a) Calculer $h'(x)$ et montrer que $h' = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.

b) En déduire que $h(x) = \arctan(\operatorname{sh} x)$ (fonction de Gudermann).

c) Vérifier numériquement en $x = 0{,}8$.

d) En déduire $\lim_{x \to +\infty} h(x)$ et interpréter.

Exercice 7 – La fonction softplus

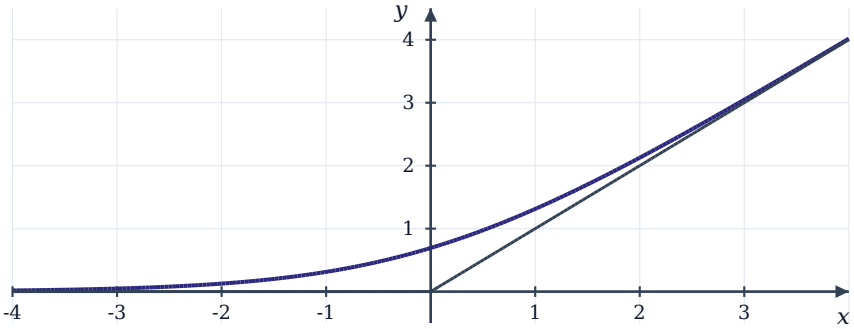
Soit $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ (utilisée en apprentissage automatique).

a) Montrer que f est strictement croissante, convexe, et calculer f' (fonction sigmoïde).

b) Étudier les limites ; montrer que $f(x) - x \to 0$ en $+\infty$.

c) Montrer que $\max(0, x) < f(x) \leq \max(0, x) + \ln 2$.

d) Préciser l'équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$ et contrôler en $x = 5$.



softplus (épais) et x ↦ max(0, x)

Exercice 8 – Étude de sh x / x

Soit $g(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ pour $x \neq 0$, $g(0) = 1$.

a) Montrer que g est continue et paire.

b) Montrer que $g(x) \geq 1$ (exercice des inégalités hyperboliques).

c) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$: étudier le signe de $x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$.

d) En déduire que $\operatorname{sh} x \leq x\operatorname{ch} x$ pour $x \geq 0$ et l'équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 9 – Datation au carbone 14

Le nombre d'atomes de carbone 14 d'un échantillon vérifie $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$, avec une demi-vie de 5730 ans.

a) Exprimer λ en fonction de la demi-vie.

b) Un fragment contient 30 % du carbone 14 initial. Estimer son âge.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que la proportion restante après t années vaut $2^{-t/5730}$.

d) L'incertitude sur la mesure de la proportion est de ±1 point (29 % à 31 %). Quelle incertitude sur l'âge ?

Exercice 10 – Échelles logarithmiques

Le niveau sonore est $L = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$ (en décibels), I l'intensité.

a) De combien augmente le niveau quand l'intensité double ? est multipliée par 10 ? par 100 ?

b) Deux sources de 60 dB chacune sonnent ensemble (intensités ajoutées) : quel niveau total ?

c) Le pH vaut $-\log_{10}[\mathrm{H}^+]$. Diviser $[\mathrm{H}^+]$ par 1000 change le pH de combien ?

d) Pourquoi utiliser des échelles logarithmiques ? (Donner l'étendue des intensités audibles : de 10^{-12} à 1 W/m².)

Exercice 11 – Limite d'une moyenne de puissances

Soient $a, b > 0$ et $M(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ pour $x \neq 0$.

a) Montrer que $M(1) = \frac{a+b}{2}$ et $M(-1) = \frac{2ab}{a+b}$.

b) Montrer que $\ln M(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$ et que $\frac{a^x+b^x}{2} = 1 + \frac{x}{2}\ln(ab) + o(x)$.

c) En déduire $\lim_{x\to 0} M(x) = \sqrt{ab}$.

d) Vérifier numériquement pour $a = 1$, $b = 4$ ($x = 10^{-3}$: 2,0005).

Exercice 12 – Encadrement polynomial du logarithme

a) Montrer que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$.

b) En déduire $\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ (encadrer en utilisant aussi $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$).

c) Estimer $\ln 1{,}1$ à 10^{-3} près.

d) Montrer que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}}$ et en déduire $\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{\mathrm{e}}{2n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Une fonction définie par deux arcsinus

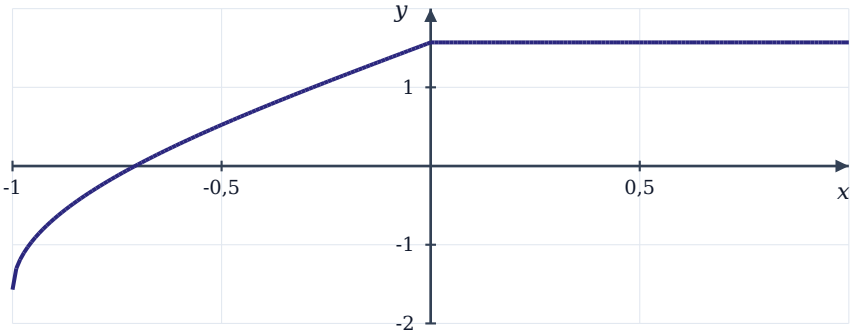
Soit $f(x) = \arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$.

a) Montrer que $\arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos|x|$.

b) En déduire $f(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[0, 1]$.

c) Montrer que $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\arcsin x$ sur $[-1, 0]$ (utiliser $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$).

d) Tracer f et vérifier en $x = -\frac{1}{2}$.



La courbe de f sur [−1, 1]

Exercice 14 – argsh et logarithme à l'infini

a) Montrer que $\operatorname{argsh} x - \ln(2x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

b) Montrer plus précisément que $\operatorname{argsh} x - \ln(2x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^{-2}}}{2}\right) \sim \frac{1}{4x^2}$.

c) Vérifier en $x = 10$.

d) Montrer de même que $\operatorname{argch} x - \ln(2x) \sim -\frac{1}{4x^2}$ et comparer les deux courbes à l'infini.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : la fonction W de Lambert

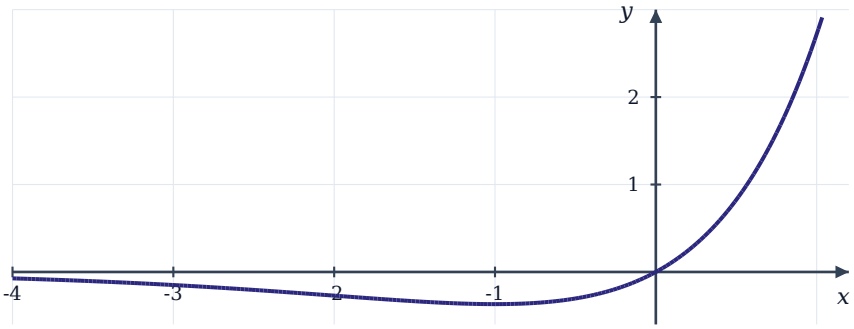
Soit $\varphi(x) = x\mathrm{e}^{x}$.

a) Montrer que φ réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$. On note W sa réciproque.

b) Calculer $W(0)$, $W(\mathrm{e})$, $W(2\ln 2)$.

c) Montrer que $W'(y) = \dfrac{W(y)}{y(1+W(y))}$ pour $y \neq 0$, $y > -\frac{1}{\mathrm{e}}$.

d) Montrer que la solution de $x = \mathrm{e}^{-x}$ est $W(1) \approx 0{,}5671$, puis résoudre $2^{x} = \frac{1}{x}$ à l'aide de W.



La courbe de $x \mapsto x\,e^{x}$ (minimum $-1/e$ en -1)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).