Plaquette 1 – Décomposition en éléments simples et applications

Fractions rationnelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Cadre. Une fraction rationnelle est $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $P, Q \in \mathrm{K}[X]$, $Q \neq 0$. On la suppose **irréductible** (numérateur et dénominateur sans racine commune).

— **Pôle** : racine du dénominateur. Son **ordre** est sa multiplicité dans Q.

— **Partie entière** : division euclidienne $P = QE + R$ donne $F = E + \dfrac{R}{Q}$ avec $\deg R < \deg Q$. Elle est nulle si $\deg P < \deg Q$.

Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$: si $Q = \prod_i (X - a_i)^{m_i}$,

$$F = E + \sum_i \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k}$$

Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$: aux éléments $\dfrac{\lambda}{(X-a)^k}$ s'ajoutent les éléments de **seconde espèce** $\dfrac{\alpha X + \beta}{(X^2 + pX + q)^k}$ avec $p^2 - 4q < 0$.

Techniques de calcul des coefficients.

— **Pôle simple** a : $\lambda = [(X-a)F(X)]_{X=a}$, soit encore $\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

— **Pôle d'ordre** m : on multiplie par $(X-a)^m$ et on évalue en a pour obtenir λ_m, puis on itère (ou on dérive).

— **Astuces** : évaluer en une valeur bien choisie, multiplier par X et faire $X \to +\infty$, utiliser la **parité** ou la conjugaison pour relier des coefficients.

Applications

— **Primitives** : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a|$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = \frac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$ pour $k \geq 2$, et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x$.

— **Sommes télescopiques** : $\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}$.

Correction de l'exercice 1 – Partie entière

Le degré du numérateur (3) dépasse celui du dénominateur (2) : il y a une partie entière.

— **Division euclidienne** : $X^3 + 2X = (X^2 - 1) \times X + 3X$.

— Donc $F = X + \dfrac{3X}{X^2 - 1}$.

— **Partie entière** : $E = X$.

— **Contrôle en** $X = 2$: $F(2) = \dfrac{8+4}{3} = 4$ et $2 + \dfrac{6}{3} = 4$. Cohérent.

— **Lecture asymptotique** : $F(x) - x \to 0$ quand $x \to \pm\infty$, donc la courbe de F admet la droite $y = x$ pour **asymptote oblique**.

Réponse. $E = X$, et $F = X + \dfrac{3X}{X^2 - 1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Pôles simples

Deux pôles simples : la forme est $F = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2}$.

— **Coefficient** a : on multiplie par $(X-1)$ et on évalue en 1 :

$$a = \left[\frac{1}{X-2}\right]_{X=1} = \frac{1}{-1} = -1$$

— **Coefficient** b : on multiplie par $(X-2)$ et on évalue en 2 : $b = \dfrac{1}{2-1} = 1$.

— **Résultat** : $F = \dfrac{-1}{X-1} + \dfrac{1}{X-2}$.

— **Vérification en** $X = 0$: $F(0) = \dfrac{1}{(-1)(-2)} = \dfrac{1}{2}$ et $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Cohérent.

— **Méthode générale** : cacher le facteur $(X-a)$ dans F puis évaluer en a — c'est la « méthode du cache ».

Réponse. $F = \dfrac{1}{X-2} - \dfrac{1}{X-1}$.

Correction de l'exercice 3 – Trois pôles simples

Forme : $F = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2} + \dfrac{c}{X-3}$.

— $a = \dfrac{1}{(1-2)(1-3)} = \dfrac{1}{2}$.

— $b = \dfrac{2}{(2-1)(2-3)} = \dfrac{2}{-1} = -2$.

— $c = \dfrac{3}{(3-1)(3-2)} = \dfrac{3}{2}$.

— **Résultat** : $F = \dfrac{1\,/\,2}{X-1} - \dfrac{2}{X-2} + \dfrac{3\,/\,2}{X-3}$.

— **Contrôle 1 — somme nulle** : $\deg(\text{num}) \leq \deg(\text{dén}) - 2$, donc $xF(x) \to 0$; la somme des coefficients doit être nulle : $\dfrac{1}{2} - 2 + \dfrac{3}{2} = 0$. Cohérent.

— **Contrôle 2 — en** $X = 0$: $F(0) = 0$ et $-\dfrac{1}{2} + 1 - \dfrac{1}{2} = 0$. Cohérent.

Réponse. $\dfrac{1\,/\,2}{X-1} - \dfrac{2}{X-2} + \dfrac{3\,/\,2}{X-3}$.

Correction de l'exercice 4 – Pôle double

Forme : $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{(X-1)^2}$.

— a : on multiplie par X et on évalue en 0 : $a = \dfrac{0+1}{(0-1)^2} = 1$.

— c : on multiplie par $(X-1)^2$ et on évalue en 1 : $c = \dfrac{1+1}{1} = 2$.

— b : on évalue F en une valeur simple, par exemple $X = -1$:

$$F(-1) = \frac{0}{(-1)(4)} = 0 = \frac{1}{-1} + \frac{b}{-2} + \frac{2}{4}$$

— Soit $0 = -1 - \dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{b}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $b = -1$.

— **Résultat** : $F = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{2}{(X-1)^2}$.

— **Contrôle en** $X = 2$: $F(2) = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ et $\dfrac{1}{2} - 1 + 2 = 1{,}5$. Cohérent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}$.

Correction de l'exercice 5 – Élément de seconde espèce

X^2+1 est **irréductible** sur $\mathbb{R}$ ($\Delta = -4 < 0$) : la forme est

$$F = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1}$$

— a : on multiplie par X et on évalue en 0 : $a = \frac{1}{0+1} = 1$.

— b **et** c : on réduit au même dénominateur,

$$\frac{a(X^2+1)+(bX+c)X}{X(X^2+1)} = \frac{(a+b)X^2+cX+a}{X(X^2+1)}$$

— Identification avec 1 : $a+b=0$ donc $b=-1$; $c=0$; $a=1$. Cohérent.

— **Résultat** : $F = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}$.

— **Contrôle en** $X=1$: $F(1) = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Cohérent.

Réponse. $F = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}$.

Correction de l'exercice 6 – Formule P(a)/Q'(a)

$Q = X^3 - 1$ a pour racines les trois racines cubiques de l'unité : $1, j, j^2$, toutes **simples**.

— $Q'(X) = 3X^2$, donc le coefficient associé au pôle a vaut $\lambda_a = \frac{1}{3a^2}$.

— Comme $a^3 = 1$, on a $\frac{1}{a^2} = a$, d'où $\lambda_a = \frac{a}{3}$.

— **Résultat** :

$$F = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{j^2}{X-j^2}\right)$$

— **Contrôle** : la somme des coefficients vaut $\frac{1+j+j^2}{3} = 0$, comme attendu puisque $\deg Q - \deg P = 3 \geq 2$.

— **Intérêt de la formule** : elle évite toute manipulation algébrique lourde dès que les pôles sont simples, même nombreux.

Réponse. $F = \frac{1}{3}\sum_{a^3=1} \frac{a}{X-a}$.

Correction de l'exercice 7 – Application à une primitive

Factorisation : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

— **Décomposition** : $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ (voir l'exercice 2).

— **Primitive** sur $]2\,;+\infty[$: $\ln(x-2) - \ln(x-1) = \ln\frac{x-2}{x-1}$.

— **Évaluation** :

$$\left[\ln\frac{x-2}{x-1}\right]_3^4 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}$$

— Valeur numérique : $\ln\frac{4}{3} \approx 0{,}2877$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle de vraisemblance** : sur $[3\,;4]$, l'intégrande varie de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{6}$; une aire d'environ 0,29 sur une largeur 1 est cohérente.

Réponse. $\ln\frac{4}{3} \approx 0{,}288$.

Correction de l'exercice 8 – Primitive avec arctangente

Le trinôme a un discriminant $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: pas de racine réelle, on met sous **forme canonique**.

— $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = 4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right]$.

— On pose $u = \frac{x+1}{2}$, donc $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$, et les bornes deviennent $u = \frac{1}{2}$ puis $u = 1$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \int_{1/2}^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{4(u^2+1)} = \frac{1}{2}\big[\arctan u\big]_{1/2}^1$$

— Soit $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2}\right)$.

— Valeur numérique : $\frac{1}{2}(0{,}7854 - 0{,}4636) = 0{,}1609$.

— **Contrôle** : l'intégrande vaut 0,2 en 0 et 0,125 en 1 ; 0,161 est bien entre les deux. Cohérent.

Réponse. $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}161$.

Correction de l'exercice 9 – Somme télescopique

Décomposition : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ (coefficients 1 et -1 par la méthode du cache).

— La somme se **télescope** :

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

— Donc $S_n = \frac{n}{n+1}$.

— **Contrôle** : $S_1 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$; $S_3 = \frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6+2+1}{12} = \frac{3}{4}$. Cohérent.

— **Limite** : $S_n \to 1$.

— **Portée** : c'est la technique reine pour sommer une fraction rationnelle en k — décomposer, puis reconnaître le télescopage.

Réponse. $S_n = \frac{n}{n+1} \to 1$.

Correction de l'exercice 10 – Télescopage à trois termes

Décomposition : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

— $a = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$; $c = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$.

— **Astuce de regroupement** : on écrit

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

— Contrôle de cette identité : le crochet vaut $\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$. Cohérent.

— La somme **télescope** directement :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

— **Contrôle** : $S_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$, et $\frac{1}{1\times 2\times 3} = \frac{1}{6}$. Cohérent.

— **Limite** : $S_n \to \frac{1}{4}$.

Réponse. $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \to \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 11 – Décomposition avec paramètre

Ici deg numérateur = deg dénominateur : il y a une **partie entière constante**.

— **Division** : $X^2 = (X^2-1)+1$, donc $F = 1 + \frac{1}{X^2-1}$.

— **Décomposition du reste** : $\frac{1}{(X-1)(X+1)} = \frac{1/2}{X-1} - \frac{1/2}{X+1}$.

— **Résultat** : $F = 1 + \frac{1/2}{X-1} - \frac{1/2}{X+1}$.

— **Contrôle en** $X=2$: $F(2) = \frac{4}{3}$ et $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{6+3-1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Cohérent.

— **Erreur classique** : oublier la partie entière et poser directement $\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$ — le système obtenu serait **incompatible**. Toujours comparer les degrés en premier.

Réponse. $F = 1 + \frac{1/2}{X-1} - \frac{1/2}{X+1}$.

Correction de l'exercice 12 – Pôle triple par développement limité

Forme : un pôle triple en 0 et un pôle simple en -1,

$$F = \frac{a}{X^3} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X} + \frac{d}{X+1}$$

— **Pôle simple** : $d = \left[\frac{1}{X^3}\right]_{X=-1} = -1$.

— **Pôle triple** : $X^3 F = \frac{1}{1+X}$, dont le développement en 0 est $1 - X + X^2 + o(X^2)$. Les coefficients a, b, c sont ceux de ce développement : $a=1$, $b=-1$, $c=1$.

— **Résultat** : $F = \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$.

— **Contrôle 1** : $\deg Q - \deg P = 4 \geq 2$, donc la somme des coefficients des $\frac{1}{X-a}$ est nulle : $c + d = 1 - 1 = 0$. Cohérent.

— **Contrôle 2 en** $X=1$: $F(1) = \frac{1}{2}$ et $1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Cohérent.

Réponse. $F = \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$.

Correction de l'exercice 13 – Décomposition de 1/(X⁴ − 1) sur R

$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$, avec X^2+1 irréductible sur $\mathbb{R}$. Forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

— **Pôles simples** par la formule $\frac{P(a)}{Q'(a)}$ avec $Q' = 4X^3$: $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Parité** : F est paire ; la décomposition de $F(-X)$ échange les rôles et, par unicité, $c = 0$.

— **Valeur en** 0 : $F(0) = -1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + d$, donc $d = -\frac{1}{2}$.

— **Résultat** : $F = \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4}{X+1} - \frac{1/2}{X^2+1}$.

— **Contrôle en** $X = 2$: $F(2) = \frac{1}{15}$ et $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{10} = \frac{15-5-6}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$. Cohérent.

Réponse. $F = \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4}{X+1} - \frac{1/2}{X^2+1}$.

Correction de l’exercice 14 – Intégrale avec un pôle double

Décomposition : on écrit $x = (x+1) - 1$, d’où

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

— **Primitive** sur $]-1\,;+\infty[$: $\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$ (la dérivée de $\frac{1}{x+1}$ est $-\frac{1}{(x+1)^2}$).

— **Évaluation** : $\left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

— Valeur numérique : $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0{,}193$.

— **Contrôle** : l’intégrande croît de 0 à $\frac{1}{4}$ sur $[0\,;1]$; une valeur proche de 0,19 est plausible (la courbe est concave au-dessus de sa corde).

Réponse. $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0{,}193$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : décomposition et primitive

a) Forme : $F = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.

— a : on multiplie par x et on évalue en 0 : $a = \frac{1}{1} = 1$.

— **Réduction au même dénominateur** :

$$\frac{a(x^2+1) + (bx+c)x}{x(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2 + cx + a}{x(x^2+1)}$$

— Identification avec $2x+1$: $a+b = 0$ donc $b = -1$; $c = 2$; $a = 1$. Cohérent.

— **Résultat** : $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{-x+2}{x^2+1}$.

— Contrôle en $x = 1$: $F(1) = \frac{3}{2}$ et $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Cohérent.

b) On intègre terme à terme sur $]0\,;+\infty[$:

— $\int \frac{dx}{x} = \ln x$.

— $\int \frac{-x}{x^2+1} dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ (forme $\frac{u'}{u}$ au facteur $-\frac{1}{2}$ près).

— $\int \frac{2}{x^2+1} dx = 2\arctan x$.

— **Primitive** : $G(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x + C$.

— **Vérification** : $G'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} = F(x)$. Cohérent.

Réponse. a) $\frac{1}{x} + \frac{2-x}{x^2+1}$ · b) $\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).