Plaquette 3 – Décomposition dans R(X) : éléments de seconde espèce

Fractions rationnelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$. Si $Q = c\prod (X-a_i)^{m_i}\prod (X^2+p_jX+q_j)^{n_j}$ avec $p_j^2-4q_j<0$:

$$F = E + \sum_i \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X-a_i)^k} + \sum_j \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\alpha_{j,k}X+\beta_{j,k}}{(X^2+p_jX+q_j)^k}$$

— **Regroupement de conjugués** : pour $z\notin\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$,

$$\frac{\lambda}{X-z}+\frac{\overline{\lambda}}{X-\overline{z}} = \frac{2\mathrm{Re}(\lambda)X - 2\mathrm{Re}(\lambda\overline{z})}{X^2-2\mathrm{Re}(z)X+|z|^2}$$

— **Fraction en X^2** : si $F(X)=G(X^2)$, on décompose $G(Y)$ puis on remplace Y par X^2 (valable quand les pôles de G sont négatifs).

— **Parité** : si F est paire (ou impaire), l'unicité relie les coefficients de $X\mapsto -X$.

— **Factorisations utiles** : $X^3\pm 1=(X\pm 1)(X^2\mp X+1)$;
$X^4+1=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$; $X^4+X^2+1=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$;
$X^4+4=(X^2+2X+2)(X^2-2X+2)$.

Correction de l'exercice 1 – Décomposer 1/(X³ + 1)

a) -1 est racine : $X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)$, avec $\Delta=1-4<0$ pour le second facteur.

b) Formule $\frac{P(a)}{Q'(a)}$ avec $Q'=3X^2$: $\lambda=\frac{1}{3\times(-1)^2}=\frac{1}{3}$.

c) On soustrait l'élément du pôle réel, et le numérateur obtenu doit être divisible par $X+1$:

$$\frac{1}{X^3+1}-\frac{1/3}{X+1}=\frac{3-(X^2-X+1)}{3(X^3+1)}=\frac{-(X-2)(X+1)}{3(X+1)(X^2-X+1)}$$

— d'où $F=\frac{1/3}{X+1}+\frac{-X+2}{3(X^2-X+1)}$.

d) $X=0$: $1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ ✓. $X=1$: $F(1)=\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ ✓.

Méthode : soustraire les éléments déjà connus fait **baisser le degré** ; le quotient restant doit se simplifier, ce qui contrôle les calculs.

Réponse. $\frac{1}{X^3+1}=\frac{1/3}{X+1}+\frac{-X+2}{3(X^2-X+1)}$.

Correction de l'exercice 2 – Décomposer 1/(X⁴ + 1) et X²/(X⁴ + 1)

a) $A(-X)=B(X)$. Si $F=\frac{aX+b}{A}+\frac{cX+d}{B}$, alors $F(-X)=\frac{-aX+b}{B}+\frac{-cX+d}{A}$; par unicité, $F(-X)=F(X)$ impose $c=-a$ et $d=b$.

b) On réduit au même dénominateur ; les termes impairs se compensent :

$$(aX+b)B+(-aX+b)A=\left(2\sqrt{2}\,a+2b\right)X^2+2b$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Égalité avec 1 : $b = \frac{1}{2}$ et $a = -\frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Donc $\frac{1}{X^4+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}X + \frac{1}{2}}{A} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}X + \frac{1}{2}}{B}$.

c) Égalité avec X^2 : $b = 0$ et $2\sqrt{2}\,a = 1$, soit $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$:

— $\frac{X^2}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}X\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$.

d) En $X = 1$: $A = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$, $B = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}414$.

b) : $\frac{0{,}5 - 0{,}354}{0{,}586} + \frac{0{,}5 + 0{,}354}{3{,}414} \approx 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5 = F(1)$ ✓.

c) : $0{,}354 \times (1{,}707 - 0{,}293) \approx 0{,}5$ ✓.

Réponse. $\frac{1}{X^4+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}X + \frac{1}{2}}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}X + \frac{1}{2}}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$; $\frac{X^2}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}X\left(\frac{1}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} - \frac{1}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}\right)$.

Correction de l’exercice 3 – Une fraction en X²

a) Deux pôles simples -1 et -4 :

$$\frac{1}{(Y+1)(Y+4)} = \frac{1/3}{Y+1} - \frac{1/3}{Y+4}$$

b) On remplace Y par X^2 : $F = \frac{1/3}{X^2+1} - \frac{1/3}{X^2+4}$. C’est une somme d’éléments de seconde espèce (X^2+1 et X^2+4 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, numérateurs de degré < 2) : par unicité, c’est **la** décomposition. La substitution est légitime parce que l’égalité de a) est une identité de fractions, vraie pour toute valeur de Y.

c) $\frac{Y}{(Y+1)(Y+4)} = \frac{-1/3}{Y+1} + \frac{4/3}{Y+4}$ (coefficients $\frac{-1}{3}$ et $\frac{-4}{-3}$), donc

— $\frac{X^2}{(X^2+1)(X^2+4)} = -\frac{1/3}{X^2+1} + \frac{4/3}{X^2+4}$.

d) b) : $\frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$ ✓. c) : $0 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ✓.

Réponse. $\frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{X^2+4}\right)$; $\frac{X^2}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{X^2+4} - \frac{1}{X^2+1}\right)$.

Correction de l’exercice 4 – Partie entière et reste modulo X² + 1

a) Division euclidienne $X^n = (X^2+1)E_n + \alpha X + \beta$; en divisant par X^2+1 :

$$F_n = E_n + \frac{\alpha X + \beta}{X^2+1}$$

— et $\frac{\alpha X + \beta}{X^2+1}$ est bien un élément de seconde espèce (X^2+1 irréductible, numérateur de degré < 2).

b) En i : $\mathrm{i}^n = \alpha\mathrm{i} + \beta$ avec α, β réels.

c) $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$: reste X. $X^5 = (X^2+1)(X^3 - X) + X$, donc $F_5 = X^3 - X + \frac{X}{X^2+1}$.

— $\mathrm{i}^6 = -1$: reste -1. $X^6 = (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1) - 1$, donc $F_6 = X^4 - X^2 + 1 - \frac{1}{X^2+1}$.

d) $F_5(1) = \frac{1}{2}$ et $1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓.

Réponse. $F_5 = X^3 - X + \frac{X}{X^2+1}$; $F_6 = X^4 - X^2 + 1 - \frac{1}{X^2+1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Élément de seconde espèce double

a) X^2+1 apparaît au carré : deux éléments de seconde espèce,

$$F = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2}$$

b) $a = \left[\frac{1}{(X^2+1)^2}\right]_{X=0} = 1$. F est impaire : $F(-X) = -F(X)$ donne, par unicité, $c = e = 0$ (les termes $\frac{c}{X^2+1}$ et $\frac{e}{(X^2+1)^2}$ sont pairs).

c) On multiplie par $X(X^2+1)^2$:

— $1 = (X^2+1)^2 + bX^2(X^2+1) + dX^2 = (1+b)X^4 + (2+b+d)X^2 + 1$.
— Donc $b=-1$ et $d=-1$: $F = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}$.
— Contrôle en 1 : $F(1) = \frac{1}{4}$ et $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ✓.

Réponse. $F = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}$.

Correction de l'exercice 6 – De C(X) à R(X) par regroupement

a) Au dénominateur commun $(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$, le numérateur est

— $\lambda(X-\overline{z}) + \overline{\lambda}(X-z) = (\lambda+\overline{\lambda})X - (\lambda\overline{z} + \overline{\lambda}\overline{z}) = 2\mathrm{Re}(\lambda)X - 2\mathrm{Re}(\lambda\overline{z})$.

b) Avec $z = j$, $\lambda = \frac{j}{3}$ (et $\overline{z} = j^2$, $\overline{\lambda} = \frac{j^2}{3}$) :

— $2\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$; $\lambda\overline{z} = \frac{j \times j^2}{3} = \frac{1}{3}$, donc $2\mathrm{Re}(\lambda\overline{z}) = \frac{2}{3}$;
— $X^2 - 2\mathrm{Re}(j)X + |j|^2 = X^2 + X + 1$.

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1/3}{X-1} - \frac{X+2}{3(X^2+X+1)}$$

c) $X=0$: $-1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ ✓.

Méthode : quand la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ est facile (pôles simples, formule $\frac{P(a)}{Q'(a)}$), on l'obtient d'abord et on regroupe ensuite.

Réponse. $\frac{1}{X^3-1} = \frac{1/3}{X-1} - \frac{X+2}{3(X^2+X+1)}$.

Correction de l'exercice 7 – Décomposer 1/(X⁶ − 1) dans R(X)

a) Les pôles sont les racines sixièmes de l'unité, simples, avec des coefficients $\frac{\omega^k}{6}$ (formule $\frac{1}{Q'(a)} = \frac{1}{6a^5} = \frac{a}{6}$) :

$$\frac{1}{X^6-1} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \frac{\omega^k}{X-\omega^k}$$

b) Avec la formule de regroupement :

— $k = 1, 5$: $\lambda = \frac{\omega}{6}$, $2\mathrm{Re}\lambda = \frac{1}{6}$, $\lambda\overline{\omega} = \frac{1}{6}$; dénominateur $X^2 - X + 1$; élément $\frac{X-2}{6(X^2-X+1)}$.
— $k = 2, 4$: $\lambda = \frac{\omega^2}{6}$, $\mathrm{Re}\omega^2 = -\frac{1}{2}$, $2\mathrm{Re}\lambda = -\frac{1}{6}$, $\lambda\overline{\omega^2} = \frac{1}{6}$; dénominateur $X^2 + X + 1$; élément $\frac{-X-2}{6(X^2+X+1)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Pôles réels : $k=0$ donne $\frac{1/6}{X-1}$, $k=3$ donne $\frac{-1/6}{X+1}$.

c) $\frac{1}{X^6-1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}+\frac{X-2}{X^2-X+1}-\frac{X+2}{X^2+X+1}\right)$.

— En 0 : $\frac{1}{6}(-1-1-2-2)=-1$ ✓. En 2 : $\frac{1}{63}\approx 0{,}01587$, et $\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}+0-\frac{4}{7}\right)\approx 0{,}01587$ ✓.

Réponse. $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}+\frac{X-2}{X^2-X+1}-\frac{X+2}{X^2+X+1}\right)$.

Correction de l’exercice 8 – Reconnaître une dérivée logarithmique

a) $4X^3$ est la dérivée de $Q=X^4-1=(X-1)(X+1)(X^2+1)$. La dérivée logarithmique d’un produit est la somme des dérivées logarithmiques :

$$\frac{Q'}{Q}=\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}+\frac{2X}{X^2+1}$$

— et c’est bien une décomposition en éléments simples (unicité).

b) $\frac{2X^3}{X^4-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}+\frac{2X}{X^2+1}\right)$; une primitive est $\frac{1}{2}\ln(x^4-1)$.

c) En 2 : $\frac{32}{15}\approx 2{,}133$ et $1+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{15+5+12}{15}=\frac{32}{15}$ ✓.

d) $3X^2+1=(X^3+X)'$ et $X^3+X=X(X^2+1)$: $\frac{3X^2+1}{X^3+X}=\frac{1}{X}+\frac{2X}{X^2+1}$.

Réponse. $\frac{4X^3}{X^4-1}=\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}+\frac{2X}{X^2+1}$; primitive $\frac{1}{2}\ln(x^4-1)$; $\frac{1}{X}+\frac{2X}{X^2+1}$.

Correction de l’exercice 9 – Trois éléments de seconde espèce

a) Pôles simples $-1,-2,-3$ de G, méthode du cache :

— en -1 : $\frac{-1}{(1)(2)}=-\frac{1}{2}$; en -2 : $\frac{-2}{(-1)(1)}=2$; en -3 : $\frac{-3}{(-2)(-1)}=-\frac{3}{2}$.

$$F=-\frac{1/2}{X^2+1}+\frac{2}{X^2+2}-\frac{3/2}{X^2+3}$$

b) deg du dénominateur de G − deg du numérateur $=2$: la somme des coefficients est nulle, $-\frac{1}{2}+2-\frac{3}{2}=0$ ✓. En 0 : $F(0)=0$ et $-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=0$ ✓.

c) $x^4F(x)=\frac{x^6}{x^6+\dots}\to 1$. Sur la décomposition, $\frac{x^4}{x^2+a}=x^2-a+\frac{a^2}{x^2+a}$, et la somme pondérée des x^2 est nulle (b)) ; il reste $-\sum c_a a=-\left(-\frac{1}{2}\times 1+2\times 2-\frac{3}{2}\times 3\right)=-(-0{,}5+4-4{,}5)=1$ ✓.

Réponse. $F=-\frac{1/2}{X^2+1}+\frac{2}{X^2+2}-\frac{3/2}{X^2+3}$; $x^4F(x)\to 1$.

Correction de l’exercice 10 – Soustraire l’élément connu

a) $\deg(X^4+1)=4<5$: pas de partie entière. Coefficient de $\frac{1}{X}$: $\left[\frac{X^4+1}{(X^2+1)^2}\right]_{X=0}=1$.

b) On soustrait et on développe $(X^2+1)^2=X^4+2X^2+1$:

$$F-\frac{1}{X}=\frac{X^4+1-(X^2+1)^2}{X(X^2+1)^2}=\frac{-2X^2}{X(X^2+1)^2}=\frac{-2X}{(X^2+1)^2}$$

— C’est déjà un élément de seconde espèce : $F=\frac{1}{X}-\frac{2X}{(X^2+1)^2}$ (le terme en $\frac{\cdot}{X^2+1}$ est nul).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $F(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ✓.

Réflexe : après avoir obtenu les coefficients faciles, soustraire les éléments trouvés fait souvent apparaître directement le reste de la décomposition.

Réponse. $F = \frac{1}{X} - \frac{2X}{(X^2+1)^2}$.

Correction de l'exercice 11 – Décomposer à coefficients rationnels

a) $(X^2+2)^2 - (2X)^2 = X^4 + 4X^2 + 4 - 4X^2 = X^4 + 4$. Discriminants : $4 - 8 = -4 < 0$ pour les deux trinômes.

b) Avec $A = X^2 - 2X + 2$ et $B = X^2 + 2X + 2$ ($A(-X) = B$), la parité impose la forme $\frac{aX+b}{A} + \frac{-aX+b}{B}$. Numérateur commun :

$$(aX+b)B + (-aX+b)A = (4a+2b)X^2 + 4b$$

— Égalité avec 1 : $b = \frac{1}{4}$, $a = -\frac{1}{8}$. Donc $\frac{1}{X^4+4} = \frac{1}{8}\left(\frac{2-X}{X^2-2X+2} + \frac{X+2}{X^2+2X+2}\right)$, à coefficients **rationnels** (contrairement à X^4+1).

c) $X = 0$: $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}(1+1)$ ✓. $X = 1$: $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1} + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{8} \times \frac{8}{5} = \frac{1}{5}$ ✓.

Réponse. $\frac{1}{X^4+4} = \frac{1}{8}\left(\frac{2-X}{X^2-2X+2} + \frac{X+2}{X^2+2X+2}\right)$.

Correction de l'exercice 12 – Le corps de base change la décomposition

a) $X^3 - 2$ est de degré 3 sans racine rationnelle (candidats $\pm 1, \pm 2$) : il est irréductible sur $\mathbb{Q}$, et $\frac{1}{X^3-2}$ est un élément simple de $\mathbb{Q}(X)$.

b) $X^3 - 2 = (X-\alpha)(X^2 + \alpha X + \alpha^2)$, le trinôme ayant $\Delta = \alpha^2 - 4\alpha^2 < 0$. Pôle réel : $\frac{1}{3\alpha^2}$. On soustrait :

$$\frac{1}{X^3-2} - \frac{1}{3\alpha^2(X-\alpha)} = \frac{3\alpha^2 - (X^2+\alpha X+\alpha^2)}{3\alpha^2(X^3-2)} = \frac{-(X-\alpha)(X+2\alpha)}{3\alpha^2(X^3-2)}$$

— d'où $\frac{1}{X^3-2} = \frac{1}{3\alpha^2(X-\alpha)} - \frac{X+2\alpha}{3\alpha^2(X^2+\alpha X+\alpha^2)}$.

c) $X = 0$: $-\frac{1}{2}$; à droite, $-\frac{1}{3\alpha^3} - \frac{2\alpha}{3\alpha^4} = -\frac{1}{3\alpha^3} - \frac{2}{3\alpha^3} = -\frac{1}{\alpha^3} = -\frac{1}{2}$ ✓.

Réponse. Élément simple de $\mathbb{Q}(X)$; dans $\mathbb{R}(X)$: $\frac{1}{3\alpha^2(X-\alpha)} - \frac{X+2\alpha}{3\alpha^2(X^2+\alpha X+\alpha^2)}$, $\alpha = \sqrt[3]{2}$.

Correction de l'exercice 13 – Une fraction impaire

a) $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$:

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

b) $a = \frac{1}{4 \times 1^3} = \frac{1}{4}$ (formule $\frac{P(a)}{Q'(a)}$). Imparité : $F(-X) = \frac{-a}{X+1} + \frac{-b}{X-1} + \frac{-cX+d}{X^2+1} = -F(X)$; par unicité $b = a$ et $d = 0$.

c) $\lim xF(x) = 0$ ($\deg Q - \deg P = 3$) donne $a + b + c = 0$, soit $c = -\frac{1}{2}$:

— $F = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}\right) - \frac{1}{2}\frac{X}{X^2+1}$.

— Contrôle en 2 : $F(2) = \frac{2}{15}$ et $\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $F = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}\right) - \frac{X}{2(X^2+1)}$.

Correction de l'exercice 14 – Deux pôles sur le cercle unité

a) Pôles simples $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$; $Q' = 2X - 2\cos\theta$ vaut $2\mathrm{i}\sin\theta$ en $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $-2\mathrm{i}\sin\theta$ en $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$:

$$F = \frac{1}{2\mathrm{i}\sin\theta}\left(\frac{1}{X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} - \frac{1}{X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\right)$$

b) Pour $|x| < 1 = |\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}|$: $\frac{1}{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = -\sum_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\theta}x^n$, et de même pour l'autre. La différence donne

— $\sum_n \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\theta}\right)x^n = \sum_n 2\mathrm{i}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n$, et en divisant par $2\mathrm{i}\sin\theta$ on obtient la formule.

c) $F(x) = \frac{1}{1-2x\cos\theta+x^2} = 1 + 2x\cos\theta + O(x^2)$. Et la formule donne $\frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$ puis $\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$ ✓.

Lecture : les coefficients $\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$ sont les valeurs en $\cos\theta$ des polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

Réponse. $F = \frac{1}{2\mathrm{i}\sin\theta}\left(\frac{1}{X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} - \frac{1}{X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\right)$; $F(x) = \sum \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}x^n$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la famille de dénominateur X⁴ + X² + 1

a) $AB = (X^2+1)^2 - X^2 = X^4 + X^2 + 1$; les deux autres identités sont immédiates.

b) On écrit le numérateur à l'aide de A et B :

$$\frac{X}{AB} = \frac{\frac{1}{2}(A-B)}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right), \qquad \frac{X^2+1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{A}\right)$$

c) $B(-X) = A$: pour une fraction paire, la forme est $\frac{aX+b}{A} + \frac{-aX+b}{B}$. Numérateur :

— $(aX+b)B + (-aX+b)A = (2b-2a)X^2 + 2b$; égalité avec 1 : $b = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$.

— $\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{X+1}{A} + \frac{1-X}{B}\right)$; en 0 : $\frac{1}{2}(1+1) = 1$ ✓.

d) $\frac{X^2}{AB} = \frac{X^2+1}{AB} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-(X+1)}{A} + \frac{1-(1-X)}{B}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{B} - \frac{X}{A}\right)$.

— $\frac{X^3}{AB} = X\cdot\frac{X^2}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{B} - \frac{X^2}{A}\right)$, et $\frac{X^2}{A} = 1 - \frac{X+1}{A}$, $\frac{X^2}{B} = 1 + \frac{X-1}{B}$: $\frac{X^3}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{X-1}{B} + \frac{X+1}{A}\right)$.

— Contrôle en $X = 1$: $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}\left(0 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$ ✓.

Réponse. $\frac{X}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)$, $\frac{X^2+1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)$, $\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{X+1}{A} + \frac{1-X}{B}\right)$, $\frac{X^2}{AB} = \frac{X}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)$, $\frac{X^3}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{X+1}{A} + \frac{X-1}{B}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).