Plaquette 4 – Primitives et intégrales de fractions rationnelles

Fractions rationnelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Primitives de référence (sur un intervalle où elles sont définies) :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a|, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} \ (k \geq 2)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\arctan\frac{x+\alpha}{\beta} \quad (\beta > 0)$$

— **Seconde espèce** : $\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+px+q} = \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{2x+p}{x^2+px+q} + \dfrac{\beta-\frac{\alpha p}{2}}{x^2+px+q}$; le premier terme a pour primitive $\frac{\alpha}{2}\ln(x^2+px+q)$.

— **Forme canonique** : $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}$.

— $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ sur $]-1,1[$.

— **Changement** $t=\tan\frac{x}{2}$: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Correction de l’exercice 1 – Intégrale de 1/(x³ + 1)

a) $-\frac{1}{2}(2x-1) = -x+\frac{1}{2}$, donc $2-x = -\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}$.

b) $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ a pour dérivée $2x-1$. Donc

$$\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

— avec $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans la formule de l’arctangente. Une primitive de $\frac{1}{x^3+1}$ est

— $G(x) = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

c) $G(1) = \frac{\ln 2}{3} - 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{6}$ et $G(0) = 0 - 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Donc

— $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}2310 + 0{,}6046 = 0{,}8356$.

— Contrôle : l’intégrande décroît de 1 à $\frac{1}{2}$; la valeur est entre $\frac{1}{2}$ et 1 ✓.

Réponse. $G(x) = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; $\int_0^1 = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}836$.

Correction de l’exercice 2 – Forme canonique et arctangente

a) $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.

b) Avec $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— car $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ et $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Valeur $\approx 0{,}605$.

c) $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$, $\beta = 2$:

— $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\Big[\arctan\frac{x+1}{2}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{4}-0\Big) = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}393$.

— Contrôle : l'intégrande vaut $\frac{1}{4}$ en -1 et $\frac{1}{8}$ en 1 ; sur une longueur 2, une aire $\approx 0{,}39$ est cohérente.

Réponse. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$; $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; $\frac{\pi}{8}$.

Correction de l'exercice 3 – Logarithme plus arctangente

a) $(x^2+2x+2)' = 2x+2$, donc

$$\frac{2x+3}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{(x+1)^2+1}$$

b) Primitive : $\ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1)$ (le trinôme est strictement positif).

c) $I = \ln 5 - \ln 2 + \arctan 2 - \arctan 1 = \ln\frac{5}{2} + \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$.

— Numériquement : $0{,}9163 + 1{,}1071 - 0{,}7854 \approx 1{,}238$.

— Contrôle : l'intégrande vaut $\frac{3}{2}$ en 0 et 1 en 1 ; une aire de 1,24 sur une largeur 1 est cohérente.

Réponse. $I = \ln\frac{5}{2} + \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \approx 1{,}238$.

Correction de l'exercice 4 – Puissances de 1 + x²

a) On intègre $1 \times \frac{1}{(1+t^2)^n}$ en dérivant le second facteur : $\left((1+t^2)^{-n}\right)' = -\frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$. Donc

$$J_n(x) = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

— et $\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}$ (écrire $t^2 = (1+t^2)-1$).

b) On isole J_{n+1} : $2nJ_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)J_n$.

c) $n=1$, $J_1 = \arctan x$: $J_2(x) = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x$, et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \approx 0{,}643$.

d) $n=2$: $J_3(1) = \frac{1}{4\times 4} + \frac{3}{4}J_2(1) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3\pi}{32} = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32} \approx 0{,}545$.

— Contrôle : $J_1(1) > J_2(1) > J_3(1)$ ($0{,}785 > 0{,}643 > 0{,}545$), cohérent avec $\frac{1}{(1+t^2)^n}$ décroissant en n.

Réponse. $J_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}J_n$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$.

Correction de l'exercice 5 – Intégrale avec un pôle double

a) Pôle simple 0 : coefficient $\frac{1}{(0-1)^2} = 1$. Pôle double 1 avec $G = \frac{1}{x}$: $G(1)=1$, $G'(1)=-1$.

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

b) Sur $[2,3]$, une primitive est $\ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x-1}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\left(\ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2}\right) - (\ln 2 - 0 - 1) = \ln\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \approx 0{,}212$.

c) Sur $[0, 2]$, la fonction n'est pas définie en 0 ni en 1 (pôles), et n'y est pas bornée : l'intégrale de Riemann sur un segment n'a pas de sens. La formule de primitive n'est valable que sur un **intervalle** ne contenant pas de pôle.

Réponse. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$; $\int_2^3 = \ln\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \approx 0{,}212$.

Correction de l'exercice 6 – Changement de variable t = e^x

a) $t = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}t = t\,\mathrm{d}x$, bornes 1 et e :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}$$

b) $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$, d'où

— $[\ln t - \ln(1+t)]_1^{\mathrm{e}} = 1 - \ln(1+\mathrm{e}) + \ln 2 \approx 0{,}380$.

c) $\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ a pour primitive $\ln(1+\mathrm{e}^x)$, donc

— $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = 1 - \ln(1+\mathrm{e}) + \ln 2$ ✓.

Remarque : toute fraction rationnelle en e^x s'intègre ainsi.

Réponse. $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = 1 + \ln 2 - \ln(1+\mathrm{e}) \approx 0{,}380$.

Correction de l'exercice 7 – Changement de variable t = tan(x/2)

a) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}(1-t^2) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ car $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$. Et $x = 2\arctan t$ donne $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

b) Bornes $t = 0$ et $t = \tan\frac{\pi}{4} = 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

— $\approx 0{,}605$.

c) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, donc $1 + \sin x = \frac{(1+t)^2}{1+t^2}$ et

— $\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \left[-\frac{2}{1+t}\right]_0^1 = -1 + 2 = 1$.

Remarque : $t = \tan\frac{x}{2}$ ramène toute fraction rationnelle en $\cos x$, $\sin x$ à une fraction rationnelle en t ; c'est une méthode sûre mais souvent lourde.

Réponse. $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = 1$.

Correction de l'exercice 8 – Changement de variable u = x²

a) $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, bornes 0 et 1 :

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

b) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\ln(x^4+1)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{4}$ (forme $\frac{u'}{u}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)(u+2)} = \frac{1}{2}\Big[\ln\frac{u+1}{u+2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\Big(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

c) L'intégrande est de la forme $x\,G(x^2)$: impaire, avec un facteur x qui fournit $\frac{1}{2}\mathrm{d}u$. Le changement $u = x^2$ divise les degrés par deux.

Réponse. $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\ln 2}{4}$; $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 9 – Changement de variable t = sin x

a) $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$, bornes 0 et 1 :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)}$$

b) $\frac{1}{(1+t)(2+t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2+t}$, d'où

— $I = \Big[\ln\frac{1+t}{2+t}\Big]_0^1 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3} \approx 0{,}288$.

c) Sur $[0,1]$, $\frac{1}{(1+t)(2+t)}$ décroît de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{6}$: l'intégrale est entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ ✓.

Règle de Bioche (repère) : si l'élément $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par $x \mapsto \pi - x$, le changement $t = \sin x$ est adapté.

Réponse. $I = \ln\frac{4}{3} \approx 0{,}288$.

Correction de l'exercice 10 – Changement de variable t = √x

a) $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, bornes 0 et 1. On fait apparaître la partie entière de $\frac{2t}{1+t}$:

$$\int_0^1 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+t}\Big)\mathrm{d}t = 2\,(1 - \ln 2)$$

— $\approx 0{,}614$.

b) Bornes $t = 1$ et $t = 2$: $\int_1^2 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+t} = \int_1^2 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t+1} = 2\ln\frac{3}{2} \approx 0{,}811$.

— Contrôle : l'intégrande décroît de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{6}$ sur un intervalle de longueur 3 ; 0,81 est bien entre 0,5 et 1,5 ✓.

Réponse. $2(1 - \ln 2) \approx 0{,}614$; $2\ln\frac{3}{2} \approx 0{,}811$.

Correction de l'exercice 11 – Argument tangente hyperbolique

a) $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\Big)$, d'où la primitive

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{sur }]-1,1[$$

b) $\frac{1}{2}\ln\frac{3/2}{1/2} = \frac{1}{2}\ln 3 \approx 0{,}549$.

c) $\mathrm{th}y = \frac{\mathrm{e}^{2y}-1}{\mathrm{e}^{2y}+1} = x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. C'est $\mathrm{argth}x$, et l'on retrouve $\mathrm{argth}' = \frac{1}{1-x^2}$.

d) $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan\frac{1}{2} \approx 0{,}464 < 0{,}549$, cohérent avec $\frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{1-x^2}$ sur $[0,1[$.

Parallèle : $\frac{1}{1+x^2}$ (pôles $\pm$i) donne une arctangente, $\frac{1}{1-x^2}$ (pôles ± 1) des logarithmes.

Réponse. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \mathrm{argth}x$; $\int_0^{1/2} = \frac{1}{2}\ln 3 \approx 0{,}549$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Une suite d’intégrales et ln 2

a) $I_0 = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$. Et, en factorisant x^n :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

b) Sur $[0,1]$, $0 \le \frac{x^n}{1+x} \le x^n$, donc $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$.

c) Par récurrence avec a) : $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \frac12 + I_2 = \ldots = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n I_n$. Comme $I_n \to 0$ par b), la somme tend vers $\ln 2$.

d) $x^2 = (x+1)(x-1)+1$, donc $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$ et $I_2 = \frac12 - 1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac12 \approx 0{,}193$.

— $I_1 = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = 1 - \ln 2$, et $I_1 + I_2 = \frac12$ ✓.

Réponse. $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \to \ln 2$; $I_2 = \ln 2 - \frac12$.

Correction de l’exercice 13 – Partie entière avant d’intégrer

On commence toujours par la **partie entière**, quand le degré du numérateur dépasse celui du dénominateur.

a) $x^3 = x(x^2+1) - x$, donc $\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$:

$$\int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac12 - \frac12 \ln 2 \approx 0{,}153$$

b) $x^4 = (x^2+1)(x^2-1)+1$, donc $\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$:

— $\int_0^1 = \frac13 - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac23 \approx 0{,}119$.

c) L’intégrande de b) est positif et non nul sur $]0,1]$: l’intégrale est **strictement positive**, donc $\frac{\pi}{4} > \frac23$, soit $\pi > \frac83 \approx 2{,}67$.

— Cette idée, poussée plus loin avec $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$, prouve $\pi < \frac{22}{7}$.

Réponse. $\frac12 - \frac12 \ln 2$; $\frac{\pi}{4} - \frac23$; donc $\pi > \frac83$.

Correction de l’exercice 14 – Trois pôles simples

a) $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$, pôles simples ; avec $Q' = 3x^2 - 1$:

$$\frac{1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$$

— ($Q'(0) = -1$, $Q'(\pm 1) = 2$.)

b) Une primitive est $-\ln x + \frac12 \ln(x-1) + \frac12 \ln(x+1) = \frac12 \ln \frac{x^2-1}{x^2}$ sur $]1, +\infty[$.

c) $\frac12 \left(\ln \frac89 - \ln \frac34\right) = \frac12 \ln \frac{32}{27} \approx 0{,}085$.

d) $\frac{A^2-1}{A^2} \to 1$, donc $\int_2^A \to \frac12 \left(0 - \ln \frac34\right) = \frac12 \ln \frac43 \approx 0{,}144$.

— Cohérent : $\frac{1}{x^3 - x} \sim \frac{1}{x^3}$ en $+\infty$, fonction dont l’aire au-delà de 2 est finie.

Réponse. $-\frac{1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$; $\int_2^3 = \frac12 \ln \frac{32}{27}$; limite $\frac12 \ln \frac43$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : l’intégrale de 1/(1 + x⁴)

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}(2x + \sqrt{2}) + \frac{1}{4}$ (car $\frac{\sqrt{2}}{8} \times \sqrt{2} = \frac{1}{4}$), et de même $-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(2x - \sqrt{2}) + \frac{1}{4}$.

b) $A = x^2 - \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; avec la formule de l’arctangente ($\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$) :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,x - 1\right), \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{B} = \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,x + 1\right)$$

c) $2x + \sqrt{2} = B'$ et $2x - \sqrt{2} = A'$, donc

— $G(x) = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{B}{A} + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\arctan(\sqrt{2}\,x + 1) + \arctan(\sqrt{2}\,x - 1)\Big)$.

d) $G(0) = 0 + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. En 1 : $\frac{B}{A} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{2})^2}{2} = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$, donc

— $G(1) = \frac{\sqrt{2}}{8} \times 2\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

— Numériquement : $0{,}3536 \times 0{,}8814 + 0{,}5554 \approx 0{,}3116 + 0{,}5554 = 0{,}867$.

— Contrôle : l’intégrande décroît de 1 à $\frac{1}{2}$ sur $[0, 1]$ ✓.

Réponse. $G = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\arctan(\sqrt{2}\,x + 1) + \arctan(\sqrt{2}\,x - 1)\Big)$; $\int_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}867$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).