# Plaquette 5 – Sommes, dérivées n-ièmes et développements

## Fractions rationnelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Outils.**

— **Télescopage** : $\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k+p}) = u_1 + \ldots + u_p - (u_{n+1} + \ldots + u_{n+p})$.

— **Condition de convergence** : si $\frac{P(k)}{Q(k)} = \sum_i \frac{\lambda_i}{k+a_i}$ (pôles simples), la somme $\sum \frac{P(k)}{Q(k)}$ ne peut converger que si $\sum \lambda_i = 0$.

— **Dérivée $n$-ième** d'un élément simple (aussi pour $a$ complexe) :

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$$

— **Série géométrique** : pour $|x| < |a|$, $\frac{1}{a-x} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{a^{n+1}}$, et $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$.

— **Coefficients de Taylor** : si $f = \sum c_n x^n$ près de 0, alors $f^{(n)}(0) = n!\,c_n$.

## Correction de l'exercice 1 – Somme de 1/(k² − 1)

**a)** $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$, pôles simples $\pm 1$ :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

**b)** Les termes $\frac{1}{k-1}$ et $\frac{1}{k+1}$ sont décalés de **deux** rangs : avec $u_k = \frac{1}{k-1}$, on somme $u_k - u_{k+2}$, et il reste deux termes au début et deux à la fin.

— $S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

**c)** $S_n \to \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

— $S_2 = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ✓.

— $S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{12} = \frac{11}{24}$ ✓.

**Réponse.** $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \to \frac{3}{4}$.

## Correction de l'exercice 2 – Somme de 1/(4k² − 1)

**a)** $4k^2 - 1 = (2k-1)(2k+1)$ :

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

**b)** Avec $u_k = \frac{1}{2k-1}$, on a $u_{k+1} = \frac{1}{2k+1}$ : télescopage d'ordre 1.

— $T_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$.

— Contrôle : $T_1 = \frac{1}{3}$ ✓ ; $T_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$ ✓.

**c)** $4k^2 = (4k^2-1) + 1$, donc $\frac{k^2}{4k^2-1} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4k^2-1}\right)$ (partie entière $\frac{1}{4}$), et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{4k^2-1} = \dfrac{n}{4} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

— Contrôle $n=1$ : $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ ✓.

**Réponse.** $T_n = \dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{1}{2}$ ; $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{4k^2-1} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

## Correction de l’exercice 3 – Quatre facteurs consécutifs

**a)** On réduit au même dénominateur la différence :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+3)-k}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

**b)** Télescopage avec $v_k = \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ :

— $\sum_{k=1}^{n} = \dfrac{1}{3}(v_1 - v_{n+1}) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right) \to \dfrac{1}{18}$.

— Contrôle $n=1$ : $\dfrac{1}{24}$ et $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{24}\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{24}$ ✓.

**c)** Même idée avec $w_k = \dfrac{1}{k(k+1)\cdots(k+p-1)}$ : $w_k - w_{k+1} = \dfrac{p}{k(k+1)\cdots(k+p)}$, donc

— $\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{k\cdots(k+p)} = \dfrac{w_1}{p} = \dfrac{1}{p \cdot p!}$. Pour $p=1$ : $1$ ; $p=2$ : $\dfrac{1}{4}$ ; $p=3$ : $\dfrac{1}{18}$ ✓.

**Réponse.** $\sum_{k=1}^{n} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right) \to \dfrac{1}{18}$ ; en général $\dfrac{1}{p \cdot p!}$.

## Correction de l’exercice 4 – Un télescopage caché

**a)** $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, donc

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

**b)** Télescopage : $\sum_{k=1}^{n} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} \to 1$. Contrôle $n=1$ : $\dfrac{3}{4}$ et $1 - \dfrac{1}{4}$ ✓.

**c)** Non : a) **est** la décomposition (unicité) ; les coefficients de $\dfrac{1}{k}$ et de $\dfrac{1}{k+1}$ sont nuls. Avec $G = \dfrac{2k+1}{(k+1)^2}$ en $0$ : $G(0) = 1$ et $G'(0) = \left[\dfrac{2(k+1) - 2(2k+1)}{(k+1)^3}\right]_0 = 2 - 2 = 0$ ✓.

**Réponse.** $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} \to 1$.

## Correction de l’exercice 5 – Un produit télescopique

**a)** $1 - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \dfrac{k-1}{k} \times \dfrac{k+1}{k}$.

**b)** Les deux produits télescopent séparément :

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}, \qquad \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{2}$$

— $P_n = \dfrac{n+1}{2n} \to \dfrac{1}{2}$. Contrôle $n=2$ : $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{3}{4}$ ✓.

**c)** $\dfrac{k^3-1}{k^3+1} = \dfrac{k-1}{k+1} \times \dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$. Posons $q(k) = k^2 - k + 1$ ; alors $k^2 + k + 1 = q(k+1)$.

— $\prod_{k=2}^{n} \dfrac{k-1}{k+1} = \dfrac{1 \times 2}{n(n+1)}$ (télescopage d’ordre 2) ; $\prod_{k=2}^{n} \dfrac{q(k+1)}{q(k)} = \dfrac{q(n+1)}{q(2)} = \dfrac{n^2+n+1}{3}$.

— Produit : $\dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} \to \dfrac{2}{3}$. Contrôle $n=2$ : $\dfrac{7}{9}$ et $\dfrac{2 \times 7}{18} = \dfrac{7}{9}$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $P_n = \dfrac{n+1}{2n} \to \dfrac{1}{2}$ ; $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} \to \frac{2}{3}$.

## Correction de l'exercice 6 – Dérivée n-ième de 1/(x² − 1)

**a)** $f = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$.

**b)** On dérive chaque élément $n$ fois avec la formule du cours :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

**c)** $n = 1$ : la formule donne $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}\right) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{4x}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$, qui est bien $f'(x)$ ✓.

**d)** $\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}\right)$ (coefficients $\frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{-2}$), donc

— $g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$.

**Contraste** : la formule de Leibniz sur $\dfrac{1}{x-1} \times \dfrac{1}{x+1}$ donnerait une somme de $n+1$ termes ; la décomposition en donne deux.

**Réponse.** $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$ ; même formule avec + pour $\dfrac{x}{x^2-1}$.

## Correction de l'exercice 7 – Dérivée n-ième de 1/(1 + x²)

**a)** $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{1}{x-\mathrm{i}} - \dfrac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$. Les deux termes sont conjugués, et $\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im}\, z$ :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1}{(x+\mathrm{i})^{n+1}}\right) = (-1)^n n!\,\mathrm{Im}\frac{1}{(x-\mathrm{i})^{n+1}}$$

**b)** En 0 : $\dfrac{1}{(-\mathrm{i})^{n+1}} = \mathrm{i}^{n+1}$, de partie imaginaire 1 si $n \equiv 0$ [4], $-1$ si $n \equiv 2$ [4], 0 si $n$ impair. Donc $f^{(2k)}(0) = (-1)^k (2k)!$ et $f^{(2k+1)}(0) = 0$.

— Avec le développement : le coefficient de $x^{2k}$ est $(-1)^k = \dfrac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}$ ✓.

**c)** $x - \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{\sin\theta}$, donc $\dfrac{1}{(x-\mathrm{i})^{n+1}} = \sin^{n+1}\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}$ et

— $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \sin^{n+1}\theta \sin((n+1)\theta)$. Sur $]0, \pi[$, $\sin\theta > 0$ et $\sin((n+1)\theta) = 0$ pour $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$, $1 \le k \le n$ : $n$ zéros distincts, et $\theta \mapsto \mathrm{cotan}\,\theta$ est une bijection de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$.

**Réponse.** $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,\mathrm{Im}(x-\mathrm{i})^{-(n+1)}$ ; $f^{(2k)}(0) = (-1)^k (2k)!$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$ ; $n$ zéros, en $\mathrm{cotan}\dfrac{k\pi}{n+1}$.

## Correction de l'exercice 8 – Dérivées en 0 et développement

**a)** $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ ; coefficients $\dfrac{1}{1-2} = -1$ et $\dfrac{2}{2-1} = 2$ :

$$f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

**b)** $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\left(-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{2}{(x-2)^{n+1}}\right)$. En 0, $(-1)^{n+1}$ se met en facteur :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!\,(-1)^{n+1}\left(-1 + \frac{2}{2^{n+1}}\right) = n!\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

**c)** $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) x^n$ (terme $n = 0$ nul). Directement :

— $-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \sum x^n$ et $\frac{2}{x-2} = -\frac{1}{1 - x/2} = -\sum \frac{x^n}{2^n}$ ✓.

— Premiers termes : $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$, et $f(x) = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{3}{2}x + \dots\right)$ ✓.

**Réponse.** $f = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$ ; $f^{(n)}(0) = n!\left(1 - 2^{-n}\right)$ ; $f(x) = \sum_{n \geq 1} (1 - 2^{-n}) x^n$.

## Correction de l’exercice 9 – Suite récurrente et fraction génératrice

**a)** $u_2 = 1 + 2 = 3$, $u_3 = 3 + 2 = 5$, $u_4 = 5 + 6 = 11$.

**b)** $1 - x - 2x^2 = (1 - 2x)(1 + x)$. On cherche $\frac{a}{1-2x} + \frac{b}{1+x}$ :

— en $x = \frac{1}{2}$ (cache de $1 - 2x$) : $a = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ ; en $x = -1$ : $b = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{1 - x - 2x^2} = \frac{2/3}{1 - 2x} + \frac{1/3}{1 + x}$$

**c)** Séries géométriques : $\frac{2/3}{1-2x} = \sum \frac{2}{3} 2^n x^n$ et $\frac{1/3}{1+x} = \sum \frac{1}{3}(-1)^n x^n$. Par unicité des coefficients :

— $u_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$.

— Contrôle : $\frac{2+1}{3} = 1$, $\frac{4-1}{3} = 1$, $\frac{8+1}{3} = 3$, $\frac{16-1}{3} = 5$, $\frac{32+1}{3} = 11$ ✓.

**Lien** : les pôles $\frac{1}{2}$ et $-1$ sont les inverses des racines $2$ et $-1$ de l’équation caractéristique $r^2 = r + 2$.

**Réponse.** $u_2 = 3$, $u_3 = 5$, $u_4 = 11$ ; $\frac{2/3}{1-2x} + \frac{1/3}{1+x}$ ; $u_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$.

## Correction de l’exercice 10 – Télescopage d’arctangentes

**a)** $\arctan(k+1)$ et $\arctan k$ sont dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc leur différence est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et sa tangente vaut

$$\tan(\arctan(k+1) - \arctan k) = \frac{(k+1) - k}{1 + k(k+1)} = \frac{1}{k^2 + k + 1}$$

— d’où l’égalité (l’arctangente est la réciproque de tan sur cet intervalle).

**b)** Télescopage : $\sum_{k=0}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan k) = \arctan(n+1) \to \frac{\pi}{2}$.

**c)** $n = 3$ :
$\arctan 1 + \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{13} \approx 0{,}7854 + 0{,}3218 + 0{,}1419 + 0{,}0768 \approx 1{,}3258$, et $\arctan 4 \approx 1{,}3258$ ✓.

**Remarque** : le « dénominateur » $1 + k(k+1)$ joue le rôle du produit $k(k+1)$ des télescopages rationnels ; c’est la formule d’addition de la tangente qui remplace la décomposition en éléments simples.

**Réponse.** $\sum_{k=0}^{n} \arctan\frac{1}{k^2 + k + 1} = \arctan(n+1) \to \frac{\pi}{2}$.

## Correction de l’exercice 11 – Une somme qui converge

**a)** Pôles simples $-1, -2, -3$ :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$v_k = -\frac{1/2}{k+1} + \frac{2}{k+2} - \frac{3/2}{k+3}, \qquad -\frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = 0$$

**b)** $v_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$ ; on vérifie que le coefficient de $\frac{1}{k+2}$ vaut $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ ✓.

**c)** Chaque parenthèse télescope :

— $\sum_{k=1}^{n} v_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) \to -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

— $n = 1$ : $v_1 = \frac{1}{24}$ et $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ ✓.

**d)** $\frac{k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)} \sim \frac{1}{k}$ : la somme des coefficients vaut $\lim k \cdot \frac{k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)} = 1 \neq 0$, et la somme se comporte comme la série harmonique, qui diverge.

**Réponse.** $v_k = -\frac{1/2}{k+1} + \frac{2}{k+2} - \frac{3/2}{k+3}$ ; $\sum_{k \geq 1} v_k = \frac{1}{4}$ ; coefficients de somme non nulle ⇒ divergence.

## Correction de l’exercice 12 – La somme harmonique n’est pas une fraction rationnelle

**a)** Si $F$ est un polynôme, $F(X+1) - F(X)$ en est un aussi, et ne peut égaler $\frac{1}{X}$, qui a un pôle en 0.

**b)** Les pôles de $F(X+1)$ sont les $c - 1$, $c$ pôle de $F$. Si $a$ était pôle de $F(X+1)$, alors $a+1$ serait pôle de $F$, de partie réelle plus grande : exclu. Donc $F(X+1)$ est définie en $a$ et $F$ ne l’est pas : $a$ est pôle de la différence

$$F(X+1) - F(X) = \frac{1}{X}$$

— dont le seul pôle est 0 : $a = 0$.

**c)** $b - 1$ est pôle de $F(X+1)$ ; il n’est pas pôle de $F$ (sa partie réelle est plus petite que le minimum). C’est donc un pôle de la différence : $b - 1 = 0$, $b = 1$. Mais alors $\mathrm{Re} b = 1 > 0 = \mathrm{Re} a$, contredisant la maximalité de $\mathrm{Re} a$. Aucune $F$ ne convient.

**d)** $\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$ : $F = -\frac{1}{X}$ convient, car $-\frac{1}{X+1} + \frac{1}{X} = \frac{1}{X(X+1)}$ ✓.

**Conclusion** : $H_n$ n’est pas une fraction rationnelle en $n$ ; c’est pourquoi on l’étudie par comparaison à $\ln n$.

**Réponse.** Pas de solution : pôle de partie réelle maximale en 0, minimale en 1, contradiction ; pour $\frac{1}{X(X+1)}$, $F = -\frac{1}{X}$.

## Correction de l’exercice 13 – Payer avec des pièces de 1 € et 2 €

**a)** $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ (1 + 1, 2), $c_3 = 2$, $c_4 = 3$ (1111, 112, 22), $c_5 = 3$.

**b)** $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$. Cache : $a = \left[\frac{1}{1+x}\right]_{x=1} = \frac{1}{2}$ et $c = \left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]_{x=-1} = \frac{1}{4}$. En $x = 0$ : $1 = a + b + c$, donc $b = \frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/4}{1+x}$$

**c)** Avec $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum (n+1)x^n$ et les séries géométriques :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $c_n = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4}$. Si $n = 2m$ : $c_n = m + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = m+1$ ; si $n = 2m+1$ : $c_n = m + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = m+1$. Donc $c_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

— Contrôle : $c_4 = 3$, $c_5 = 3$ ✓.

**d)** Une façon de payer est déterminée par le nombre $q$ de pièces de 2 €, qui peut valoir $0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (les pièces de 1 € complètent) : $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ choix.

**Réponse.** $1, 1, 2, 2, 3, 3$ ; $\frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/4}{1+x}$ ; $c_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

## Correction de l'exercice 14 – Sommes de Riemann de fractions rationnelles

On reconnaît des **sommes de Riemann** : pour $f$ continue sur $[0,1]$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

**a)** $\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+(k/n)^2}$ : limite $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

**b)** $\frac{n}{(n+k)(n+2k)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{(1+k/n)(1+2k/n)}$. On décompose : $\frac{1}{(1+x)(1+2x)} = \frac{2}{1+2x} - \frac{1}{1+x}$, d'où la limite

— $\int_0^1 \Big(\frac{2}{1+2x} - \frac{1}{1+x}\Big)\mathrm{d}x = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2} \approx 0{,}405$.

**c)** $\frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \times \frac{k/n}{1+(k/n)^2}$ : limite $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln 2$.

— Contrôle numérique de b) pour $n = 2\,000$ : la somme vaut environ 0,4053, proche de $\ln 1{,}5 \approx 0{,}4055$ ✓.

**Réponse.** a) $\frac{\pi}{4}$ · b) $\ln\frac{3}{2}$ · c) $\frac{1}{2}\ln 2$.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le problème de Bâle

**a)** $\cot\theta + \mathrm{i} = \frac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\sin\theta}$, d'où la puissance $n$-ième. Pour $\theta_k$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_k} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} = \pm 1$ est réel, et $\sin^n\theta_k > 0$ : la partie imaginaire est nulle.

**b)** Avec $c = \cot\theta_k$ : $\mathrm{Im}(c+\mathrm{i})^n = \sum_{j \text{ impair}} \binom{n}{j} c^{n-j}\mathrm{Im}(\mathrm{i}^j) = \binom{n}{1}c^{n-1} - \binom{n}{3}c^{n-3} + \dots$ Les exposants $n-j$ sont pairs ($n$ impair) : c'est $P(c^2) = P(x_k) = 0$.

— $\theta \mapsto \cot^2\theta$ est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et les $\theta_k$ ($k \le m$) y sont distincts : $m$ racines distinctes pour un polynôme de degré $m$.

**c)** Relations coefficients-racines :

$$\sum_{k=1}^{m} x_k = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{1}} = \frac{(2m+1)(2m)(2m-1)}{6(2m+1)} = \frac{m(2m-1)}{3}$$

**d)** On somme l'encadrement pour $\theta = \theta_k$, avec $\frac{1}{\theta_k^2} = \frac{n^2}{\pi^2 k^2}$, et on utilise c). **e)** On multiplie par $\frac{\pi^2}{n^2} = \frac{\pi^2}{(2m+1)^2}$ : les deux bornes, $\frac{\pi^2 m(2m-1)}{3(2m+1)^2}$ et $\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}\Big(m + \frac{m(2m-1)}{3}\Big)$, tendent vers $\frac{\pi^2 \times 2}{3 \times 4} = \frac{\pi^2}{6}$. Par encadrement, $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \to \frac{\pi^2}{6}$.

**Réponse.** $\sum_{k=1}^{m} \cot^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}$ ; par encadrement, $\sum_{k\ge 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).