Plaquette 2 – Techniques de décomposition dans C(X)

Fractions rationnelles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$. Si $F = \frac{P}{Q}$ est irréductible et $Q = c\prod_i (X-a_i)^{m_i}$:

$$F = E + \sum_i \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X-a_i)^k}, \qquad E \text{ partie entière}$$

— **Partie entière** : quotient de la division de P par Q ; nulle si $\deg P < \deg Q$.

— **Pôle simple** a : $\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

— **Pôle d'ordre** m : si $F = \frac{G(X)}{(X-a)^m}$ avec $G(a) \neq 0$ défini en a, et $G(a+h) = c_0 + c_1 h + \ldots + c_{m-1}h^{m-1} + o(h^{m-1})$, la partie polaire est $\frac{c_0}{(X-a)^m} + \ldots + \frac{c_{m-1}}{X-a}$.

— **Unicité** : elle permet d'exploiter les symétries ($F(-X) = \pm F(X)$, $\overline{F} = F$ si F est réelle).

— **Contrôle asymptotique** : si $\deg P < \deg Q$, $xF(x) \to \frac{a_{n-1}}{b_n}$ si $\deg P = \deg Q - 1$; en général la somme des coefficients des $\frac{1}{X-a_i}$ vaut $\lim_{x\to\infty} xF(x)$ (nulle si $\deg Q - \deg P \geq 2$).

Correction de l'exercice 1 – Trois pôles simples et contrôle asymptotique

a) $\deg(X^2+1) = 2 < 3$: pas de partie entière. Les pôles $1, 2, -3$ sont simples :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X+3}$$

b) Méthode du cache (on masque le facteur du pôle et on évalue) :

— $a = \frac{1+1}{(1-2)(1+3)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$;

— $b = \frac{4+1}{(2-1)(2+3)} = \frac{5}{5} = 1$;

— $c = \frac{9+1}{(-3-1)(-3-2)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

c) $xF(x) \to 1$ (quotient des termes dominants $\frac{x^3}{x^3}$), et $xF(x) \to a+b+c$ par la décomposition : $-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 1$ ✓.

— En 0 : $F(0) = \frac{1}{(-1)(-2)(3)} = \frac{1}{6}$, et $\frac{-1/2}{-1} + \frac{1}{-2} + \frac{1/2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ ✓.

Réponse. $F = -\frac{1/2}{X-1} + \frac{1}{X-2} + \frac{1/2}{X+3}$.

Correction de l'exercice 2 – Pôle double par la formule de Taylor

a) $F = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$.

b) $a = \left[\frac{X^2+1}{(X-1)^2}\right]_{X=-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En multipliant la forme par $(X-1)^2$:

$$G(X) = c + b(X-1) + \frac{a(X-1)^2}{X+1}$$

— en $X=1$: $G(1)=c$; en dérivant puis en évaluant en 1 (le dernier terme a une dérivée nulle en 1, car $(X-1)^2$ y est racine double) : $G'(1)=b$.

— $G(1)=\frac{2}{2}=1$; $G'(X)=\frac{2X(X+1)-(X^2+1)}{(X+1)^2}=\frac{X^2+2X-1}{(X+1)^2}$, donc $G'(1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Ainsi $F=\frac{1/2}{X+1}+\frac{1/2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$.

d) En 0 : $F(0)=\frac{1}{1\times 1}=1$ et $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=1$ ✓. Asymptotique : $xF(x)\to 1=a+b$ ✓.

Réponse. $F=\frac{1/2}{X+1}+\frac{1/2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$.

Correction de l’exercice 3 – Pôle triple et pôle double

a) $X^3F=\frac{1}{(1-X)^2}=1+2X+3X^2+o(X^2)$ (dérivée de la série géométrique). Donc la partie polaire en 0 est

$$\frac{1}{X^3}+\frac{2}{X^2}+\frac{3}{X}$$

b) $(X-1)^2F=H=X^{-3}$: $H(1)=1$ et $H'(1)=-3$. La partie polaire en 1 est $\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{3}{X-1}$.

— $F=\frac{1}{X^3}+\frac{2}{X^2}+\frac{3}{X}+\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{3}{X-1}$.

c) $\deg Q-\deg P=5\geq 2$: la somme des coefficients des $\frac{1}{X-a}$ doit être nulle, et $3-3=0$ ✓.

— En 2 : $F(2)=\frac{1}{8\times 1}=\frac{1}{8}$, et $\frac{1}{8}+\frac{2}{4}+\frac{3}{2}+1-3=0{,}125+0{,}5+1{,}5+1-3=0{,}125$ ✓.

Réponse. $F=\frac{1}{X^3}+\frac{2}{X^2}+\frac{3}{X}+\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{3}{X-1}$.

Correction de l’exercice 4 – Décomposition de 1/(Xⁿ − 1)

a) Les pôles ω^k sont simples. Avec $Q=X^n-1$, $Q'=nX^{n-1}$ et $(\omega^k)^n=1$:

$$\lambda_k=\frac{1}{n(\omega^k)^{n-1}}=\frac{\omega^k}{n(\omega^k)^n}=\frac{\omega^k}{n}$$

b) $n=2$, $\omega=-1$: $\frac{1}{X^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}\right)$, ce qui est bien la décomposition connue ✓.

c) Pour $P=X^{n-1}$: $\lambda_k=\frac{(\omega^k)^{n-1}}{n(\omega^k)^{n-1}}=\frac{1}{n}$. Donc

— $\frac{X^{n-1}}{X^n-1}=\frac{1}{n}\sum_k\frac{1}{X-\omega^k}$, c’est-à-dire $\frac{nX^{n-1}}{X^n-1}=\frac{Q'}{Q}=\sum_k\frac{1}{X-\omega^k}$.

d) En évaluant en x : $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x-\omega^k}=\frac{nx^{n-1}}{x^n-1}$. Pour $n=2$, $x=3$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ et $\frac{2\times 3}{8}=\frac{3}{4}$ ✓.

Réponse. $\frac{1}{X^n-1}=\frac{1}{n}\sum\frac{\omega^k}{X-\omega^k}$; $\sum_k\frac{1}{x-\omega^k}=\frac{nx^{n-1}}{x^n-1}$.

Correction de l’exercice 5 – Pôles complexes conjugués

a) $X^2+X+1=(X-j)(X-j^2)$, pôles simples j et $j^2=\bar{j}$. Avec $Q'=2X+1$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\lambda_j = \frac{1}{2j+1} = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}, \qquad \lambda_{j^2} = \frac{1}{2j^2+1} = -\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}$$

— car $2j+1 = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}+1 = \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $2j^2+1 = -\mathrm{i}\sqrt{3}$. Donc $F = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}\left(\frac{1}{X-j} - \frac{1}{X-j^2}\right)$.

b) F est à coefficients réels, donc $\overline{F} = F$. En conjuguant la décomposition, $\frac{\overline{\lambda}_j}{X-\bar{j}}$ est un élément simple relatif au pôle $\bar{j} = j^2$; par unicité, $\lambda_{j^2} = \overline{\lambda_j}$. Ici $\overline{\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}} = -\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}$ ✓.

c) $F(0) = 1$, et $\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}\right) = \frac{-j^2+j}{\mathrm{i}\sqrt{3}}$ (car $\frac{1}{j} = j^2$, $\frac{1}{j^2} = j$). Or $j - j^2 = \mathrm{i}\sqrt{3}$: on obtient 1 ✓.

Réponse. $F = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}\left(\frac{1}{X-j} - \frac{1}{X-j^2}\right)$, coefficients conjugués.

Correction de l’exercice 6 – Utiliser la parité

a) $(X^2-1)^2 = (X-1)^2(X+1)^2$:

$$F = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{X+1}$$

b) $G = (X-1)^2F = \frac{1}{(X+1)^2}$: $a = G(1) = \frac{1}{4}$ et $b = G'(1) = \left[-\frac{2}{(X+1)^3}\right]_{X=1} = -\frac{1}{4}$.

c) En remplaçant X par $-X$: $F(-X) = \frac{a}{(X+1)^2} - \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X-1)^2} - \frac{d}{X-1}$. Comme $F(-X) = F(X)$, l’unicité donne $c = a$ et $d = -b$:

— $F = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+1}\right)$.

d) $F(0) = 1$ et $\frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1$ ✓.

Méthode : une symétrie de F divise le travail par deux ; on l’exploite toujours par l’unicité de la décomposition.

Réponse. $F = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+1}\right)$.

Correction de l’exercice 7 – Une symétrie X ↦ −1 − X

a) $(-1-X)^2(-1-X+1)^2 = (X+1)^2X^2$: $F(-1-X) = F(X)$.

b) $X^2F = (1+X)^{-2} = 1 - 2X + o(X)$: partie polaire en 0 égale à $\frac{1}{X^2} - \frac{2}{X}$.

c) Substituons $-1-X$ dans la partie polaire en 0 : $\frac{1}{(X+1)^2} + \frac{2}{X+1}$; par unicité, c’est la partie polaire en -1 :

$$F = \frac{1}{X^2} - \frac{2}{X} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{2}{X+1}$$

d) $F(1) = \frac{1}{4}$ et $1 - 2 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4}$ ✓.

— Somme : $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) - 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$. Avec $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, le premier terme vaut $2S_n - 1 + \frac{1}{(n+1)^2}$ et le second $2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ (télescopage).

— Donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2(k+1)^2} = 2S_n - 3 + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$. Contrôle $n=1$: $2-3+1+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $F = \frac{1}{X^2} - \frac{2}{X} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{2}{X+1}$; $\sum \frac{1}{k^2(k+1)^2} = 2S_n - 3 + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$.

Correction de l'exercice 8 – Coefficients par la limite en l'infini

a) $F = \frac{a}{X+2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$.

b) $a = \left[\frac{2X^2+1}{(X-1)^2}\right]_{X=-2} = \frac{9}{9} = 1$; $c = \left[\frac{2X^2+1}{X+2}\right]_{X=1} = \frac{3}{3} = 1$.

c) On multiplie par x et on fait tendre x vers $+\infty$:

$$xF(x) = \frac{ax}{x+2} + \frac{bx}{x-1} + \frac{cx}{(x-1)^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a + b$$

— et directement $xF(x) = \frac{2x^3+x}{x^3+\dots} \to 2$. Donc $a + b = 2$, soit $b = 1$.

$F = \frac{1}{X+2} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$.

d) $F(0) = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$ ✓.

Réponse. $F = \frac{1}{X+2} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$.

Correction de l'exercice 9 – Partie entière de degré 2

a) $X^4 = (X^2-1)(X^2+1) + 1$, donc

$$F = X^2 + 1 + \frac{1}{X^2-1}$$

— la partie entière est $E = X^2 + 1$.

b) $\frac{1}{X^2-1} = \frac{1/2}{X-1} - \frac{1/2}{X+1}$ (pôles simples, coefficients $\frac{1}{2\times 1}$ et $\frac{1}{2\times(-1)}$ par $\frac{P(a)}{Q'(a)}$). Donc

— $F = X^2 + 1 + \frac{1/2}{X-1} - \frac{1/2}{X+1}$.

c) $F(x) - (x^2+1) = \frac{1}{x^2-1} \to 0$ en $\pm\infty$: la courbe est asymptote à la parabole $y = x^2 + 1$.

— Pour $|x| > 1$, $\frac{1}{x^2-1} > 0$: la courbe est **au-dessus** de la parabole. Contrôle : $F(2) = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$ et $2^2 + 1 = 5$.

Réponse. $E = X^2 + 1$; $F = X^2 + 1 + \frac{1/2}{X-1} - \frac{1/2}{X+1}$; asymptote parabolique $y = x^2 + 1$, courbe au-dessus.

Correction de l'exercice 10 – Partie entière et pôle double à l'origine

a) Numérateur et dénominateur sont de degré 3, de coefficients dominants 1 : la partie entière est la constante 1, et $X^3 + 1 = X^2(X-1) + X^2 + 1$.

$$F = 1 + \frac{X^2+1}{X^2(X-1)}$$

b) Coefficient de $\frac{1}{X-1}$: $\left[\frac{X^3+1}{X^2}\right]_{X=1} = 2$.

c) $X^2F = \frac{X^3+1}{X-1} = -(1+X^3)(1+X+X^2+\dots) = -1 - X + o(X)$: partie polaire $-\frac{1}{X^2} - \frac{1}{X}$.

— $F = 1 + \frac{2}{X-1} - \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $F(2) = \frac{9}{4} = 2{,}25$ et $1 + 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 2{,}25$ ✓. $F(-1) = 0$ et $1 - 1 - 1 + 1 = 0$ ✓.

Remarque : la partie entière 1 contribue à X^2F par le terme X^2, d'ordre 2 : elle n'influe pas sur la partie polaire en 0, qui ne dépend que des termes d'ordre 0 et 1.

Réponse. $F = 1 + \frac{2}{X-1} - \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X}$.

Correction de l'exercice 11 – Décomposition de P′/P

a) La dérivée d'un produit donne $P' = \sum_i m_i (X-a_i)^{m_i - 1} c \prod_{j \neq i} (X-a_j)^{m_j}$; en divisant par P :

$$\frac{P'}{P} = \sum_i \frac{m_i}{X - a_i}$$

b) $3X^2 - 1$ est la dérivée de $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$: la décomposition est $\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}$.

c) $\frac{P'}{P} = \frac{2}{X-1} + \frac{3}{X+2}$. En 0 : $P(0) = 1 \times 8 = 8$ et $P' = 2(X-1)(X+2)^3 + 3(X-1)^2(X+2)^2$, d'où $P'(0) = -16 + 12 = -4$, et $\frac{P'(0)}{P(0)} = -\frac{1}{2}$; de l'autre côté $-2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ ✓.

d) Si $\lambda_i = m_i \in \mathbb{N}^*$, a) fournit $P = \prod (X-a_i)^{m_i}$. Réciproquement, si $F = \frac{P'}{P}$, les coefficients sont les multiplicités des racines de P (a)), qui sont des entiers naturels ; et un pôle de F a un coefficient ≥ 1.

— Ainsi $\frac{1/2}{X}$ n'est pas une dérivée logarithmique de polynôme : il faudrait « $P = \sqrt{X}$ ».

Réponse. $\frac{P'}{P} = \sum \frac{m_i}{X - a_i}$; $\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}$; $\frac{2}{X-1} + \frac{3}{X+2}$; coefficients entiers positifs.

Correction de l'exercice 12 – Retrouver une fraction à partir de sa décomposition

a) Au dénominateur commun $(X-1)(X-2)(X-3)$, le numérateur est

$$(X-2)(X-3) + (X-1)(X-3) + (X-1)(X-2) = 3X^2 - 12X + 11$$

— (c'est Q' pour $Q = (X-1)(X-2)(X-3)$, d'après l'exercice précédent). Donc $F = \frac{3X^2 - 12X + 11}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.

b) Zéros : $3x^2 - 12x + 11 = 0$, $\Delta = 144 - 132 = 12$, $x = 2 \pm \frac{\sqrt{12}}{6} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, soit $\approx 1{,}42$ et $\approx 2{,}58$: l'un dans $]1, 2[$, l'autre dans $]2, 3[$.

c) Sur $]1, 2[$, F est strictement **décroissante** (chaque $\frac{1}{x-a}$ l'est), tend vers $+\infty$ en 1^+ et $-\infty$ en 2^- : elle s'annule exactement une fois (théorème de la bijection). Même raisonnement sur $]2, 3[$. C'est la version rationnelle du théorème de Rolle : les racines de Q' s'intercalent entre celles de Q.

Réponse. $F = \frac{3X^2 - 12X + 11}{(X-1)(X-2)(X-3)}$; zéros $2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, un entre chaque paire de pôles consécutifs.

Correction de l'exercice 13 – Coefficients de Lagrange et décomposition

a) Pôles simples, coefficient $\frac{1}{Q'(a_i)}$. En dérivant le produit, tous les termes sauf un contiennent $X - a_i$:

$$Q'(a_i) = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\deg Q - \deg 1 = n \geq 2$: $x \cdot \frac{1}{Q(x)} \to 0$, et la limite vaut aussi la somme des coefficients. Donc $\sum_i \frac{1}{Q'(a_i)} = 0$.

c) Même argument pour $\frac{P}{Q}$, dont les coefficients sont $\frac{P(a_i)}{Q'(a_i)}$: si $\deg P \leq n-2$, $\frac{xP(x)}{Q(x)} \to 0$. Si $P = X^{n-1}$, $\frac{x^n}{Q(x)} \to 1$: la somme vaut 1.

d) $Q'(0) = (0-1)(0-3) = 3$, $Q'(1) = (1)(1-3) = -2$, $Q'(3) = (3)(2) = 6$.

b) : $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$ ✓.

c) avec $P = X$: $0 - \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 0$ ✓ ; avec $P = X^2$: $0 - \frac{1}{2} + \frac{9}{6} = 1$ ✓.

Réponse. $\frac{1}{Q} = \sum \frac{1}{Q'(a_i)(X-a_i)}$; $\sum \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)} = 0$ si $\deg P \leq n-2$, $= 1$ si $P = X^{n-1}$.

Correction de l'exercice 14 – Pôle double complexe

a) $X^2 + 1 = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$:

$$F = \frac{a}{(X-\mathrm{i})^2} + \frac{b}{X-\mathrm{i}} + \frac{c}{(X+\mathrm{i})^2} + \frac{d}{X+\mathrm{i}}$$

b) $a = G(\mathrm{i}) = \frac{1}{(2\mathrm{i})^2} = -\frac{1}{4}$; $b = G'(\mathrm{i}) = \left[-\frac{2}{(X+\mathrm{i})^3}\right]_{X=\mathrm{i}} = -\frac{2}{(2\mathrm{i})^3} = -\frac{2}{-8\mathrm{i}} = \frac{1}{4\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{4}$.

c) F est réelle : $c = \overline{a} = -\frac{1}{4}$ et $d = \overline{b} = \frac{\mathrm{i}}{4}$.

— $F = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(X-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{(X+\mathrm{i})^2}\right) - \frac{\mathrm{i}}{4}\left(\frac{1}{X-\mathrm{i}} - \frac{1}{X+\mathrm{i}}\right)$.

d) En 0 : $\frac{1}{(-\mathrm{i})^2} = -1$ et $\frac{1}{\mathrm{i}^2} = -1$, donc le premier groupe vaut $-\frac{1}{4} \times (-2) = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{-\mathrm{i}} - \frac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i} + \mathrm{i} = 2\mathrm{i}$, donc le second vaut $-\frac{\mathrm{i}}{4} \times 2\mathrm{i} = \frac{1}{2}$. Total $1 = F(0)$ ✓.

Réponse. $F = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(X-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{(X+\mathrm{i})^2}\right) - \frac{\mathrm{i}}{4}\left(\frac{1}{X-\mathrm{i}} - \frac{1}{X+\mathrm{i}}\right)$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la fraction 1/(X(X + 1)⋯(X + n))

a) Pôle simple $-k$: on masque $X + k$ et on évalue en $-k$. Les autres facteurs donnent $\prod_{j \neq k}(j-k)$:

— pour $j < k$: $(-k)(1-k)\cdots(-1) = (-1)^k k!$; pour $j > k$: $1 \times 2 \times \ldots \times (n-k) = (n-k)!$.

— Le coefficient vaut $\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k}{n!}\binom{n}{k}$.

b) deg du dénominateur $= n + 1 \geq 2$: la somme des coefficients est nulle, $\frac{1}{n!}\sum (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (c'est aussi $(1-1)^n = 0$).

c) $F_n(1) = \frac{1}{1 \times 2 \times \ldots \times (n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}$. Donc

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{1+k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$$

— $n = 2$: $1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ✓.

d) $\int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$, et par le binôme $\int_0^1 \sum_k \binom{n}{k}(-t)^k \, \mathrm{d}t = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$: même résultat, obtenu par une tout autre voie.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $F_n = \frac{1}{n!}\sum (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{X+k}$; $\sum (-1)^k \binom{n}{k} = 0$; $\sum \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).